Devoir surveillé - 1h30 - 10 avril 2018

Toute réponse doit être expliquée. *Les exercices sont indépendants. Toute technologie électronique et documents interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Questions de cours [2+1 points]

(a) À partir de la définition (sans utiliser de théorèmes du cours), montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x-2) + x$ est dérivable en $a+2$.

(b) Énoncer le théoreme de Rolle.

Exercice 1. [2+1+2 points]

(a) Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I, et que f est nulle en trois points distincts $a_1 < a_2 < a_3$ appartenant à I. En utilisant le théorème de Rolle[1] (plusieurs fois si besoin), montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f''(c) = 0$.

(b) Déterminer la dérivée seconde de la fonction

$$f(x) = x\sinh(x) + x^2 - \cosh(x) - 7x$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Étudier le signe de f''.

$$\textit{Rappel :}\quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(c) Montrer que le nombre de solutions de l'équation

$$\cosh(x) + 7x = x\sinh(x) + x^2$$

est inférieur ou égal à deux.

Exercice 2. [4 points]

Soit α et β deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Il est aussi possible d'utiliser le théorème des accroissements finis.

Déterminer les nombres α et β tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. [2 points]
Pour tous $k \geq 2$ entiers, calculer la dérivée d'ordre k de la fonction

$$x \mapsto (1+x^2)e^{3x}.$$

On pourra utiliser la formule de Leibniz.

Exercice 4. [2+1+1+1 points]
(a) En utilisant le théoreme des accroissements finis, montrer que pour tous $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

$$\textit{Rappel :} \quad (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \arctan(0) = 0.$$

(b) Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \ln(x) - \ln(\arctan x)$$

pour $x > 0$ et étudier le signe de $f'(x)$.

(c) Montrer que l'équation

$$\frac{x}{\arctan(x)} = \frac{2}{\arctan(2)}$$

admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Montrer que l'équation

$$\frac{x}{\arctan(x)} = \frac{1}{17}$$

n'a aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$.