Université Grenoble Alpes - L1 - Math 203 2017-2018

Devoir surveillé - 1h30 - 10 avril 2018

Questions de cours [2+1 points]
(a) À partir de la définition (sans utiliser de théorèmes du cours), montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x-2) + x$ est dérivable en $a + 2$.

(b) Énoncer le théoreme de Rolle.

Exercice 1. [2+1+2 points]
(a) Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I, et que f est nulle en trois points distincts $a_1 < a_2 < a_3$ appartenant à I. En utilisant le théorème de Rolle [1] (plusieurs fois si besoin), montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f''(c) = 0$.

Corrigé : [1 pt si idée correcte, + 1 pt si usage de théorème bien justifié]
On a $f(a_1) = f(a_2)$, f continue sur $[a_1, a_2] \subset I$, et f dérivable sur $]a_1, a_2[\subset I$. Par le théorème de Rolle appliqué à f entre a_1 et a_2, il existe $b_1 \in]a_1, a_2[$ t.q. $f'(b_1) = 0$. De manière analogue, il existe $b_2 \in]a_2, a_3[$ t.q. $f'(b_2) = 0$.
On a $f'(b_1) = f'(b_2)$ avec $b_1 \neq b_2$, f' continue sur $[b_1, b_2] \subset I$, et f' dérivable sur $]b_1, b_2[\subset I$. Par le théorème de Rolle appliqué à f' entre b_1 et b_2, il existe $c \in]b_1, b_2[\subset I$ t.q. $f''(c) = 0$.

(b) Déterminer la dérivée seconde de la fonction

$$f(x) = x \sinh(x) + x^2 - \cosh(x) - 7x$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Étudier le signe de f''.

Corrigé : [0.5 pt calcul, 0.5 étude de signe]

$$f''(x) = (x \sinh(x) + x^2 - \cosh(x) - 7x)'' = 2 + \cosh(x) + x \sinh(x) \geq 2 + \cosh(x) > 0.$$

Dans la première estimée on utilise que $\pm \sinh(x) \geq 0$ et $\pm x \geq 0$ sur $\pm[0, +\infty[$. Dans la deuxième éstimée on utilise $\cosh(x) > 0$.

(c) Montrer que le nombre de solutions de l'équation

$$\cosh(x) + 7x = x \sinh(x) + x^2$$

est inférieur ou égal à deux.

Corrigé : [2 pt]
Supposons qu'il existe trois solutions $a_1 < a_2 < a_3$, d'où $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$. Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on peut appliquer (a) à un intervalle ouvert I t.q. $[a_1, a_3] \subset I$. Cela donne l'existence de $c \in I$ t.q. $f''(c) = 0$. Cela contradit (b).

Exercice 2. [4 points]
Soit α et β deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Il est aussi possible d'utiliser le théorème des accroissements finis.

Déterminer les nombres α et β tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : [4 pt] Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ quelque soit α, β.
On a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \beta$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, donc f continue en 0 ssi $\beta = 1$.
Si $x < 0$, $f'(x) = \alpha$, et si $x > 0$, $f'(x) = -1/(1+x^2)$. On a donc $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$, donc nécessairement $\alpha = -1$ pour que f' soit continue. On vérifie ensuite que pour $\alpha = -1$, f est différentiable en 0 et f' continue en 0.

Exercice 3. [2 points]
Pour tous $k \geq 2$ entiers, calculer la dérivée d'ordre k de la fonction

$$x \mapsto (1+x^2)e^{3x}.$$

On pourra utiliser la formule de Leibniz.

Corrigé : [2 pt]
Posons $f(x) = (1+x^2)$, $g(x) = e^{3x}$. Alors $g^{(l)}(x) = 3^l e^{3x}$ pour $l \in \mathbb{N}_0$. La formule de Leibniz dit

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x).$$

Comme $f^{(j)}(x) = 0$ pour $j \geq 3$, ceci est égal à

$$3^k \binom{k}{0}(1+x^2)e^{3x} + 3^{k-1}\binom{k}{1} 2xe^{3x} + 2 \times 3^{k-2}\binom{k}{2} e^{3x}.$$

On peut simplifier $\binom{k}{0} = 1$, $\binom{k}{1} = k$, $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$.

Exercice 4. [2+1+1+1 points]
(a) En utilisant le théoreme des accroissements finis, montrer que pour tous $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

Corrigé : [2 pt]

Le TAF appliqué à $\arctan(x)$ entre 0 et x donne l'existence de $c \in]0, x[$ t.q.

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \frac{1}{1+c^2},$$

d'où $\arctan(x) = x\frac{1}{1+c^2}$. Comme $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$ pour $0 < c < x$, cela implique $\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$.

(b) Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \ln(x) - \ln(\arctan x)$$

pour $x > 0$ et étudier le signe de $f'(x)$.

Corrigé : [1 pt]
$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\arctan x}$, donc $f'(x) > 0$ par la première inégalité dans (a).

(c) Montrer que l'équation

$$\frac{x}{\arctan(x)} = \frac{2}{\arctan(2)}$$

admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé : [1 pt]
Par (a) et monotonicité stricte de la fonction exponentielle, $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto e^{f(x)} = \frac{x}{\arctan(x)}$ est strictement monotone. Elle est aussi continue. Par le théoreme de la bijection, elle est donc injective, donc s'il existe une solution de $f(x) = \frac{2}{\arctan(2)}$, elle est unique. Un exemple de solution est $x = 2$.

(d) Montrer que l'équation

$$\frac{x}{\arctan(x)} = \frac{1}{17}$$

n'a aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé : [1 pt]
Par (a), $\frac{x}{\arctan(x)} > 1$, mais $\frac{1}{17} < 1$.