Examen session 1

11 mai 2016 - 2 heures

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Les exercices et problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Question de cours.

1. Donner la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergeant vers $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.
2. Donner un exemple de fonction continue, non bornée sur $\mathbb{R}$ et qui a une limite finie en $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction continue, bornée, non périodique et qui n'a pas de limite finie en $+\infty$.

Exercice 1.

1. Donner un DL à l'ordre 7 de e^{-u^2} en 0.
2. En déduire un DL à l'ordre 7 de $\sin\left(e^{-u^2} - 1\right)$ en 0.
3. Donner un DL à l'ordre 7 de $(\ln(1 + u^3))^2$ en 0.
4. En déduire
$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin\left(e^{-u^2} - 1\right) + u^2 - u^4/2}{\left(\ln(1 + u^3)\right)^2}.$$

Exercice 2.

1. Résoudre pour $x > 0$ l'équation
$$2\cosh(\ln x) = x + \frac{16}{3x^3}.$$
2. Montrer que pour $x > 0$ l'équation
$$2\cos(\ln x) = x + \frac{16}{3x^3}$$
n'a pas de solution. On pourra pour cela étudier les variations du membre de droite.

Problème. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos^2(\pi x)$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ si $x \in]1, +\infty[$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,1]$.
4. Tracer le segment de droite $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ y = x\}$, puis le graphe de f sur $[0,1]$. On représentera les points $(0, f(0))$, $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$, $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$, $(\frac{3}{4}, f(\frac{3}{4}))$ et $(1, f(1))$. On fera attention à la positition du graphe par rapport à Δ au voisinage de $(1, f(1))$.

   On considère à partir de maintenant, quand elle existe, la suite récurrente définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.
5. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall u \in]0,1[, |\sin(\pi u)| < |u|$.
6. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = f(1-u) - (1-u)$. Montrer que $g(u) = u - \sin^2(\pi u)$.
7. Déduire de 5 et 6 que pour $0 < u \leq \frac{1}{\pi^2}$, $g(u) > 0$, puis que pour $x \in [1 - \frac{1}{\pi^2}, 1[$, $f(x) - x > 0$.
8. Quels sont le ou les points fixes de f sur $[1 - \frac{1}{\pi^2}, 1]$?
9. Déduire du tableau de variation de f et de la question 7 que pour tout $t \in [1 - \frac{1}{\pi^2}, 1]$, $f([t,1]) \subset [t,1]$.
10. On suppose ici que $u_0 \in [1 - \frac{1}{\pi^2}, 1]$. Montrer que $(u_n)_n$ converge et donner sa limite a.
11. En utilisant la question 5, montrer que $\forall x \in [1 - \frac{1}{4\pi^2}, 1],\ 0 \leq f'(x) \leq 1/2$.
12. En déduire que pour tous $x, y \in [1 - \frac{1}{4\pi^2}, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
13. On suppose que $u_0 \in [1 - \frac{1}{4\pi^2}, 1]$. En déduire que $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - a|$.
14. On prend $u_0 = 1 - \frac{1}{4\pi^2}$. Trouver $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - a| \leq 2^{-10}$.