Université Joseph Fourier - L1 - Math 123 2015-2016

Examen session 1 -CORRIGÉ

11 mai 2016 - 2 heures

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Les exercices et problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Question de cours.

1. *Donner la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergeant vers $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.* $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \geq A$, $|f(x) - L| \leq \epsilon$.
2. *Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$, non bornée et qui a une limite finie en $+\infty$.* Si $f(x) = \exp(-x)$, f est continue comme composée de fonctions continues, f est non bornée sur $\mathbb{R}$ car $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$ mais $f \to_{x\to+\infty} 0$.
3. *Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée, non périodique et qui n'a pas de limite finie en $+\infty$.* Soit f définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \sin(x)$ sinon. f est bien continue car elle l'est sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x\to0^-} f = 0 = \lim_{x\to0^+} f$. De plus f est bornée car $\forall x, |f(x)| \leq 1$ et f n'a pas de limite en $+\infty$ car sin n'en n'a pas non plus d'après le cours.

Exercice 1.

1. *Donner un DL à l'ordre 7 de e^{-u^2} en 0.* On a $\exp(-x) = 1-x+x^2/2-x^3/6+O(x^4)$ donc $\exp(-u^2) = 1 - u^2 + u^4/2 - u^6/6 + O(u^8)$.
2. *En déduire un DL à l'ordre 7 de $\sin\left(e^{-u^2}-1\right)$ en 0.* On a $\sin(x) = x-x^3/6+O(x^5)$ donc

$$\begin{aligned}\sin(e^{-u^2} - 1) &= (-u^2 + u^4/2 - u^6/6 + O(u^8)) \\ &\quad -\frac{1}{6}\big(- u^2 + u^4/2 - u^6/6 + O(u^8)\big)^3 + O(u^{10}) \\ &= -u^2 + u^4/2 - u^6/6 + u^6/6 + O(u^8) = -u^2 + u^4/2 + O(u^8).\end{aligned}$$

3. *Donner un DL à l'ordre 7 de $(\ln(1 + u^3))^2$ en 0.* On a $\big(\ln(1 + u^3)\big)^2 = (u^3 - u^6/2 + O(u^9))^2 = u^6 + O(u^9)$.
4. *En déduire*

$$\lim_{u\to0} \frac{\sin\left(e^{-u^2} - 1\right) + u^2 - u^4/2}{\big(\ln(1 + u^3)\big)^2}.$$

le rapport vaut
$$\frac{O(u^8)}{u^6+O(u^9)} = O(u^2) \to_{u\to 0} 0.$$

Exercice 2.

1. *Résoudre pour $x > 0$ l'équation*
$$2\cosh(\ln x) = x + \frac{16}{3x^3}.$$
On a $\forall x > 0$, $2\cosh(\ln x) = e^{\ln x} + e^{-\ln x} = x + 1/x$, donc l'équation est $1/x = (16/3)/x^3$ soit car $x \neq 0$, $x^2 = 16/3$, donc $x = \pm 4/\sqrt{3}$ mais $x > 0$ donc $x = 4/\sqrt{3}$.
2. *Montrer que pour $x > 0$ l'équation*
$$2\cos(\ln x) = x + \frac{16}{3x^3}$$
n'a pas de solution. On pourra pour cela étudier les variations du membre de droite. Si $f(x)$ est le membre de droite, $f'(x) = 1 - 16/x^4$ qui s'annule sur $x > 0$ ssi $x = 2$, avec $f' < 0$ sur $]0,2[$ où elle est donc décroissante et $f' > 0$ pour $x > 2$ où elle est croissante. Donc f atteint sa borne inf en 2, où $f(2) = 2 + 2/3 > 2$. Mais $|2\cos\ln x| \leq 2$ donc les deux membres ne peuvent pas être égaux.

Problème. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos^2(\pi x)$ si $x \in [0,1[$ et $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ si $x \in [1,+\infty[$.*

1. *Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.*f est bien définie et continue sur $[0,1[$ car f y est la composition de cos est continue et $x \mapsto \pi x$ continue. Pour $x \geq 1$ ln est bien définie et continue, et x aussi et ne s'annule pas donc $\ln x/x$ est continue. De plus $\lim_{1^-} f = \cos^2(\pi) = 1 = 1 + \ln(1)/1 = \lim_{0^+} f$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. *Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$ et $]1,+\infty[$, et que f a des dérivées à gauche et droite en 1 qu'on déterminera.* En remplaçant "continu" par "dérivable" dans la question précédente, on obtient la dérivabilité sur les deux intervalles. Mais cette fois $\lim_{0^-} f' = -2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x)(1) = 0$ et $\lim_{0^+} f' = (1/x^2 - (\ln x)/x^2)(1) = 1$.
3. *Dresser le tableau de variations de f. Sur $[0,1[$, on pourra utiliser la formule $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$.* f' est du signe de $-\cos(\pi x)$ sur $[0,1]$ donc f décroît sur $[0,1/2]$, f' s'annule uniquement en $1/2$ et f croît sur $[1/2,1]$. Pour $x \geq 1$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ donc str. positif jusqu'à e et str. négatif ensuite.

x	0		$1/2$		1		e	
f'	0	$-$	0	$+$	$0 \vert 1$	$+$		$-$
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$		$\searrow$

4. *Montrer que f a une limite L en $+\infty$. Déterminer le signe de $f - L$ pour $x > 1$. En déduire la position du graphe de f sur $]1,+\infty[$ par rapport à la droite $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = L\}$.* Le cours donne $\ln x/x \to_{x+\infty} = 0$ donc $f \to_{+\infty} = 1$. De plus $f(x) - 1 = \ln x/x \geq 0$ donc le graphe de f est au-dessus de $H = \{y = 1\}$.

5. *Tracer les droites* $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x\}$ *et* H*, puis le graphe de* f*. On représentera les points* $(0, f(0))$*,* $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$*,* $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$*,* $(\frac{3}{4}, f(\frac{3}{4}))$*,* $(1, f(1))$ *et* $(e, f(e))$*. On fera attention pour* $(1, f(1))$ *aux dérivées à gauche et droite de* 1*, ainsi qu'à la positition du graphe par rapport à* Δ *au voisinage de* $(1, f(1))$*.*

   On considère à partir de maintenant, quand elle existe, la suite récurrente définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

6. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que* $\forall u \in]0,1[, |\sin(\pi u)| < \pi|u|$. $u \mapsto \sin(\pi u)$ est C^1 sur $[0,1]$, donc par le TAF,

$$\forall u \in]0,1[, \exists c \in]0,u[,\ |\frac{\sin(\pi u) - \sin(\pi 0)}{u - 0}| = |\pi \cos(\pi c)| < \pi,$$

   car $c \in]0,1[$. Donc puisque $u > 0$, on a $|\sin(\pi u)| < |\pi u|$.

7. *Soit* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(u) = f(1-u) - (1-u)$*. Montrer que* $g(u) = u - \sin^2(\pi u)$. On a $g(u) = \cos^2(\pi(1-u)) - (1-u) = (1 - \sin^2(\pi - \pi u)) + u - 1 = u - \sin^2(\pi u)$ car $(\sin(\pi + a))^2 = (-\sin a)^2$.

8. *Déduire de 6 et 7 que pour* $0 < u \leq \frac{1}{\pi^2}$*,* $g(u) \geq 0$*, puis que pour* $x \in [1 - \frac{1}{\pi^2}, 1]$*,* $f(x) \geq x$*.* Si $u \leq 1/\pi^2$, $g(u) \geq u - \pi^2 u^2 = u(1 - u\pi^2)$ est du signe de $1 - u\pi^2$ qui est positif si $u \leq 1/\pi^2$. Si $1 - 1/\pi^2 \leq x \leq 1$ alors si $u = 1 - x$, $0 \leq u \leq 1/\pi^2$ donc $f(x) - x = g(u) - (1-u) \geq 0$.

9. *Déduire du tableau de variation de* f *et de la question 8 que pour tout* $t \in I = [1 - \frac{1}{\pi^2}, 1]$*,* $f([t,1]) \subset [t,1]$*.* On a d'abord $1 - 1/\pi^2 \geq 1/2$ ssi $1/\pi^2 \leq 1/2$ ssi $2 \leq \pi^2$ ce qui est vrai car $2 < \pi < \pi^2$. On sait que f est strictement croissante sur $[t,1]$ donc par le théorème de la bijection $f([t,1]) = [f(t), f(1)]$. Puisque $f(t) \geq t$ et $f(1) = 1$, on a le résultat.

10. *On suppose ici que* $u_0 \in [1 - \frac{1}{\pi^2}, 1]$*. Montrer que* $(u_n)_n$ *converge et donner sa limite* a*.* D'après la question 9 et le cours, si $u_0 \in [t,1]$ pour $t \geq 1 - 1/\pi^2$, alors $u_n \in [t,1]$ pour tout n. Puisque $f(x) \geq x$ sur cet intervalle si $t \geq 1 - 1/\pi^2$, u_n est croissante donc converge vers a qui est point fixe de f. Mais $f(a) > a$ si $a \in [t,1[$ donc $a = 1$ nécessairement.

11. *En utilisant l'indication de la question 3 et la question 6, montrer que* $\forall x \in [1 - \frac{1}{4\pi^2}, 1], 0 \leq f'(x) \leq 1/2$. On a $f' = -\sin(2\pi x) = -\sin(2\pi(x-1))$. On a donc $|f'(x)| \leq \pi|2\pi|x-1| \leq 2\pi/(4\pi^2) = 1/2$.

12. *En déduire que* $\forall x, y \in [1 - \frac{1}{4\pi^2}, 1], |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$. Le TAF sur $[x,y] \subset [0,1]$ donne $|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)|x-y|$ pour $c \in]x,y[$ d'où le résultat en utilisant $|f'(c)| \leq 1/2$.

13. *On suppose que* $u_0 \in [1 - \frac{1}{4\pi^2}, 1]$*. En déduire que* $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - a|$. On a bien $|u_0 - 1| \leq 1/2^0|u_0 - 1|$. Supposons que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - f(1)| \leq 1/2|u_n - 1| \leq (1/2)(1/2^n)|u_0 - 1| = 1/2^{n+1}|u_0 - 1|$. Cette récurrence prouve le résultat.

14. On prend $u_0 = 1 - \frac{1}{4\pi^2}$. Trouver $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - a| \leq 2^{-10}$. Pour tout n, puisque $\pi^2 > 3^2 > 9 > 8 = 2^3$, $(1/2^n)(1/(4\pi^2)) \leq 1/2^{n+3}$ qui est $\leq 2^{-10}$ si $n \geq 7$. On peut prendre $N = 7$.