# Devoir surveillé 3

4 avril 2016 - 1h30 heures

**Toute réponse doit être expliquée**. *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

**Les exercices et problème sont indépendants.** *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

**Aucun document ni outil éléctronique autorisés.**

**Question de cours.**

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Ce théorème fournit l'existence de certains points. Dans le cas de $I = [0, 1]$, $f(x) = x^3$, quels sont ces points (ou ce point) ?

**Problème.** Soit $f(x) = \ln(1 + 2x)$, et $g(x) = f(x) - x$. On considère de plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, quand elle existe, par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Quel est l'ensemble de définition $D$ de $f$ ?
2. En étudiant les variations de $g$, montrer qu'il existe un unique $L > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]0, L[.$$
Dans toute la suite, on ne demande pas de trouver la valeur explicite de $L$.
3. Quels sont les points fixes de $f$ ?
4. Déterminer le signe de $g(1)$. En déduire que $L > 1$.
5. Déterminer le signe de $g(3)$. En déduire que $L < 3$.
6. Donner le tableau de variations de $f$ sur $D$.
7. Donner une équation de la tangente au graphe de $f$ en $(0, f(0))$.
8. Tracer le graphe de $f$. On tracera en particulier sur le dessin la tangente en $(0, f(0)$, la première bissectrice (d'équation $\{y = x\}$) et on indiquera les points $(L, f(L))$, $(1, f(1))$ et $(3, f(3))$.
9. On pose $I = [0, L]$. Montrer que $f(I) = I$.
10. On pose $J = [L, +\infty[$. Montrer que $f(J) = J$.
11. On suppose que $u_0 \in I$. Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie, qu'elle converge, et déterminer sa limite.
12. On suppose que $u_0 \in J$. Même question.
13. Soit $K = \mathbb{R}_-^* \cap D$. A-t-on $f(K) \subset K$ ?

14. Si $u_0 \in K$, montrer que $(u_n)_n$ n'est jamais définie pour tout $n$.
15. Montrer que
$$\forall x \geq L,\ 0 < f'(x) < 2/3.$$
16. En déduire que si $u_0 \geq L$,
$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ |u_n - u_{n+m}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - u_m|.$$
17. En déduire que si $u_0 \geq L$, il existe $C > 0$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L| \leq C\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
On exprimera $C$ en fonction de $L$ et $u_0$.
18. On suppose $L \leq u_0 \leq L + 10$. Trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \geq A,\ L \leq u_n \leq L + 10^{-9}.$$
La réponse pourra s'exprimer en terme d'entiers et de logarithmes d'entiers.

**Exercice 2.** Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable.

1. Montrer que $u^{\frac{1}{u}}$ est dérivable.
2. Calculer sa dérivée.

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. On suppose qu'il existe $M \geq 0$, tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq Mx^2. \tag{1}$$

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |f(0)| + M|x|^3. \tag{2}$$
2. Donner un exemple d'une fonction satisfaisant (1). Dans ce cas, peut-on trouver $a \geq 0$, $0 \leq b < M$, tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a + b|x|^3$ ?