Question de cours.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Ce théorème fournit l'existence de certains points. Dans le cas de $I = [0,1]$, $f(x) = x^3$, quels sont ces points (ou ce point) ?

Problème. Soit $f(x) = \ln(1+2x)$, et $g(x) = f(x) - x$. On considère de plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, quand elle existe, par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. En étudiant les variations de g, montrer qu'il existe un unique $L > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, L[.$$
Dans toute la suite, on ne demande pas de trouver la valeur explicite de L.
3. Quels sont les points fixes de f ?
4. Déterminer le signe de $g(1)$. En déduire que $L > 1$.
5. Déterminer le signe de $g(3)$. En déduire que $L < 3$.
6. Donner le tableau de variations de f sur D.
7. Donner une équation de la tangente au graphe de f en $(0, f(0))$.
8. Tracer le graphe de f. On tracera en particulier sur le dessin la tangente en $(0, f(0)$, la première bissectrice (d'équation $\{y = x\}$) et on indiquera les points $(L, f(L))$, $(1, f(1))$ et $(3, f(3))$.
9. On pose $I = [0, L]$. Montrer que $f(I) = I$.
10. On pose $J = [L, +\infty[$. Montrer que $f(J) = J$.
11. On suppose que $u_0 \in I$. Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie, qu'elle converge, et déterminer sa limite.
12. On suppose que $u_0 \in J$. Même question.
13. Soit $K = \mathbb{R}_-^* \cap D$. A-t-on $f(K) \subset K$?
14. Si $u_0 \in K$, montrer que $(u_n)_n$ n'est jamais définie pour tout n.
15. Montrer que
$$\forall x \geq L,\ 0 < f'(x) < 2/3.$$
16. En déduire que si $u_0 \geq L$,
$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ |u_n - u_{n+m}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - u_m|.$$
17. En déduire que si $u_0 \geq L$, il existe $C > 0$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L| \leq C\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
On exprimera C en fonction de L et u_0.
18. On suppose $L \leq u_0 \leq L + 10$. Trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \geq A,\ L \leq u_n \leq L + 10^{-9}.$$
La réponse pourra s'exprimer en terme d'entiers et de logarithmes d'entiers.

Question de cours.

1. Théorème des accroissements finis : Soit a, b deux réels avec $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$.
2. Dans le cas de $I = [0, 1]$, $f(x) = x^3$, on a $-1 = f(0) - f(1) = -f'(c)$ et donc un point c vérifie $f'(c) = 3c^2 = 1$ et donc $c = 1/\sqrt{3}$.

Problème. Soit $f(x) = \ln(1 + 2x)$, et $g(x) = f(x) - x$. On considère de plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, quand elle existe, par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. L'ensemble de définition D de f est $D =]-1/2, +\infty[$.
2. En étudiant les variations de g, montrer qu'il existe un unique $L > 0$ tel que $\forall x \in D,\ g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, L[$.

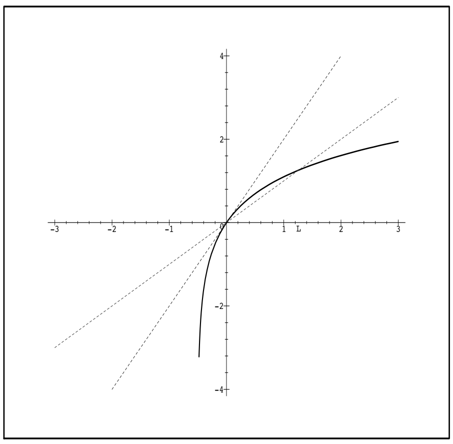
   On a $g'(x) = \dfrac{1 - 2x}{1 + 2x}$ d'où le tableau de variation

x	$-1/2$		0		$1/2$		L		$+\infty$
g'	$+\infty$	$+$	2	$+$	0	$-$		$-$	0
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2 - 1/2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   D'après ce tableau, comme g est strictement croissante sur $]0, 1/2[$ et $g(0) = 0$ donc $g(1/2) > 0$. Comme $g(x) \to -\infty$ lorsque $x \to +\infty$, il existe $a > 1/2$ tel que $g(a) < 0$. Comme $g(a) < 0 < g(1)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en un point de l'intervalle $]1/2, a[$. Donc g s'annule en un point L de $I =]1/2, +\infty[$ et ce point est unique dans I puisque g est strictement croissante sur I.
3. Les points fixes de f sont 0 et L.
4. On a $g(1) = \ln(3) - 1 > 0$ car $3 > e$. Comme g décroit strictement sur $]1/2, +\infty[$ et que $1, L \in]1/2, +\infty[$ avec $g(1) > 0 = g(L)$ on a nécessairement $L > 1$.
5. On a $g(3) = \ln(7) - 3 < 0$ car $2 < e$ et donc $7 < 2^3 < e^3$. Toujours à cause de la stricte décroissance de g sur $]1/2, +\infty[$ et $g(3) < 0 = g(L)$, on a nécessairement $L < 3$.
6. On a $f'(x) = \dfrac{2}{1 + 2x}$ d'où le tableau de variation

x	$-1/2$		0		L		$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$	2	$+$		$+$	0
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	L	$\nearrow$	$+\infty$

7. Une équation de la tangente au graphe de f en $(0, 0)$ est $y = 2x$.
8. Graphe de f, tangente en $(0, 0)$ et la première bissectrice.



9. On a $f(0)=0$ et $f(L)=L$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, en posant $I=[0,L]$, on a $I\subset f(I)$ et comme f est croissante sur I, pour tout $x\in I$, $0=f(0)\le f(x)\le f(L)=L$ donc $f(I)\subset I$. Donc $f(I)=I$. (on peut aussi citer le théorème de la bijection)
10. Soit $\alpha\in J=[L,+\infty[$ comme $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, il existe $a\ge L$ tel que $f(a)\ge\alpha$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $c\in[L,a]\subset J$ tel que $f(c)=\alpha$. Donc $J\subset f(J)$. Comme f est croissante et $f(L)=L$ on a $f(J)\subset J$. D'où $f(J)=J$. (on peut aussi citer le théorème de la bijection)
11. On suppose que $u_0\in I$. Du fait que $f(I)=I$, on établit facilement par récurrence que (u_n) est bien définie et que $u_n\in I$ pour tout n donc (u_n) est majorée par L. Comme $g(x)=f(x)-x\ge 0$ sur I, on a $u_{n+1}=f(u_n)\ge u_n$, donc la suite (u_n) est croissante. Etant majorée par L, elle converge vers un nombre ℓ tel que $0\le\ell\le L$. Comme f est continue, $\ell=\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(\ell)$. Donc ℓ est un point fixe qui ne peut être que 0 ou L. Si $u_0=0$, alors $\ell=0$ et sinon puisque $u_n\ge u_0>0$ on a $\ell=L$.
12. On suppose que $u_0\in J$. De même, comme $f(J)=J$, on a $u_n\in J$ pour tout n et donc (u_n) est minorée par L. Comme $g\le 0$ sur J, la suite (u_n) est décroissante. Elle converge donc vers une limite $\ell\ge L$ qui par grâce à la continuité de f est à nouveau un point fixe qui ne peut qu'être L.
13. Soit $K=]-1/2,0[$. Comme $\lim_{x\to-1/2} f(x)=-\infty$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in]-1/2,\eta-1/2[$ on a $f(x)\le -1$. En particulier, $f(K\cap]-1/2,\eta-1/2[)\cap K=\emptyset$ donc $f(K)$ n'est pas inclus dans K.

   Si $u_0\in K$ et que la suite $(u_n)_n$ était définie pour tout n, alors on aurait $u_n\in K$ pour tout n. Comme $g\le 0$ sur K, la suite (u_n) serait décroissante majorée par $u_0<0$. Si la suite (u_n) convergeait, elle devrait converger vers un point fixe $\ell<0$. Il n'y en a pas. Donc la suite (u_n) tendrait vers $-\infty$ ce qui contredirait le fait que $u_n\ge -1/2$ pour tout n. Donc : si $u_0\in K$, la suite $(u_n)_n$ n'est pas définie pour tout n.
14. La fonction $f'(x)=\dfrac{2}{1+2x}>0$ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc on a
$$\forall x\ge L,\ 0<f'(x)\le f(L)<f(1)=2/3$$
   car $L>1$.
15. Soit $u_0\ge L$. Alors $u_n\ge L$ pour tout n. A $m\in\mathbb{N}$ fixé, montrons par récurrence sur n que
$$\forall n\in\mathbb{N}\ |u_n-u_{n+m}|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-u_m|.$$
   La propriété est clairement vraie pour $n=0$, supposons la vraie pour n alors
$$|u_{n+1}-u_{n+1+m}|=|f(u_n)-f(u_{n+m})|=|f'(c)(u_n-u_{n+m})|\le|f'(c)|\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-u_m|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}|u_0-u_m|$$
   où $c\ge L$ est garanti par le théorème des accroissements finis. La propriété est donc vraie quelque soit n par récurrence et ceci pout tout m.
16. Si $u_0\ge L$, à n fixé, dans l'inégalité $|u_n-u_{n+m}|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-u_m|$ faisons tendre m vers $+\infty$, il vient
$$|u_n-L|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-L|$$
   et donc si $u_0\ge L$,
$$\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-L|\le C\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
   avec $C=u_0-L$.
17. On suppose $L\le u_0\le L+10$. La constante $C=10$ peut être prise. Pour avoir $L\le u_n\le L+10^{-9}$ d'après l'inégalité précédente, il suffit que $10.\left(\frac{2}{3}\right)^n\le 10^{-9}$ c'est à dire $n\ln(2/3)\le -10\ln(10)$ soit $n\ge\dfrac{10\ln(10)}{\ln(3)-\ln(2)}$..

Exercice 2. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable.

1. Montrer que $u^{\frac{1}{u}}$ est dérivable.
2. Calculer sa dérivée.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. On suppose qu'il existe $M \geq 0$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq Mx^2. \tag{1}$$

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |f(0)| + M|x|^3. \tag{2}$$

2. Donner un exemple d'une fonction satisfaisant (1). Dans ce cas, peut-on trouver $a \geq 0$, $0 \leq b < M$, tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a + b|x|^3$?