Devoir surveillé 2

9 mars 2016 - 2 heures

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-) exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Les exercices et problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni technologie *inventée après 1916 autorisés.*

Question de cours.

1. Donner la définition de l'existence d'une limite à gauche en $a \in I$ d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.
2. Montrer en utilisant uniquement la définition ci-dessus que
$$f \underset{x \to a^-}{\to} L \Rightarrow 3f \underset{x \to a^-}{\to} 3L.$$
3. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que f a une limite finie en 0^- mais une limite valant $+\infty$ en 0^+.

Exercice 1. Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_n v_n \underset{n \to \infty}{\to} L \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $L \in \mathbb{R}^*$. Montrer que
$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \neq 0 \text{ et } v_n \neq 0.$$
2. Existe-t-il $L \in \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifiant l'hypothèse et telles que $(u_n)_n$ n'a ni limite finie, ni infinie ?
3. Même question que 2., si l'on suppose en outre que $v_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$.
4. Même question que 2., si l'on suppose en outre que $v_n \underset{n \to \infty}{\to} \alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit
$$f(x) = \frac{\cos(x) + 2}{x^3 + x\sin^2(x^2) + 1} \text{ et } g = \exp \circ f.$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. g a-t-elle une limite en 0^+ ? Si oui, quelle est cette limite ?
3. Montrer que f a une limite en $+\infty$ et donner cette limite.

4. Montrer que g a une limite en $+\infty$ et donner cette limite. L'application g est-elle équivalente à une constante quand $x \to +\infty$?
5. Montrer que le dénominateur de f s'annule au moins une fois en un point $b \in \mathbb{R}_-^*$.
6. Montrer que si le dénominateur de f s'annule en $b < 0$, alors $b \in]-1, 0[$.
7. L'application $h(x) = x^3 f(x)$ at-t-elle une limite en $+\infty$? Si oui, quelle est cette limite ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction f, telle que de plus
$$\exp(f(x)) \underset{x \to +\infty}{\not\sim} \exp(\sqrt{x}).$$
2. Donner un exemple d'une telle fonction f, telle que de plus
$$\exp(f) \underset{x \to +\infty}{\sim} \exp(\sqrt{x}),$$
et $\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \neq \sqrt{x}$.
3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $f - (1+\epsilon)\sqrt{x}$ a une limite infinie en $+\infty$.
4. Soit $\epsilon \geq 0$. Montrer que $f + (1+\epsilon)\sqrt{x}$ a une limite infinie en $+\infty$.
5. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$\frac{(f(x))^k}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\to} 1.$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$, et
$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{array} \right.$$
Soient les suites $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = u_n + v_n$ et $s_n = u_n - v_n$.

1. Trouver une relation simple entre r_{n+1} et r_n, ainsi qu'entre s_{n+1} et s_n.
2. Montrer qu'il existe $k \in]-1, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq k^n |s_0|$.
3. Montrer que $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ ont une limite finie qu'on déterminera en fonction de u_0 et v_0.
4. En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont une limite finie qu'on déterminera en fonction de u_0 et v_0.