Devoir surveillé 2 - Corrigé

9 mars 2016 - 2 heures

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-) exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Les exercices et problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni technologie *inventée après 1916 autorisés.*

Question de cours.

1. **Donner la définition de l'existence d'une limite à gauche en $a \in I$ d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.**

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, a - \delta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon.$$

2. **Montrer en utilisant uniquement la définition ci-dessus que**

$$f \underset{x \to a^-}{\to} L \Rightarrow 3f \underset{x \to a^-}{\to} 3L.$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit δ tel que 1. ci-dessus soit valable pour $\epsilon' = \epsilon/3$. Alors si $a - \delta \leq x < a$ on a $|f(x) - L| \leq \epsilon/3$ soit $|3f(x) - 3L| \leq \epsilon$, ce qui montre que $\lim_{a^-} 3f = 3L$.

3. **Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que f a une limite finie en 0^- mais une limite valant $+\infty$ en 0^+.** Soit $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$. Alors f vérifie les hypothèses.

Exercice 1. Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_n v_n \underset{n \to \infty}{\to} L \in \mathbb{R}$.

1. **On suppose $L \in \mathbb{R}^*$. Montrer que**

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \neq 0 \textbf{ et } v_n \neq 0.$$

Par définition de la limite, pour $\epsilon = |L/2|$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n v_n - L| \leq |L/2|.$$

En particulier, puisque $|L| - |u_n| \leq ||u_n v_n| - |L|| \leq |u_n v_n - L|$ par l'inégalité (gauche) triangulaire, $|u_n v_n| \geq |L| - |L|/2 = |L|/2 > 0$. Donc $u_n v_n \neq 0$ pour $n \geq N$.

2. **Existe-t-il $L \in \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifiant l'hypothèse et telles que $(u_n)_n$ n'a ni limite finie, ni infinie ?** Oui : si $u_n = v_n = (-1)^n$, on a $u_n v_n = 1 \underset{n \to \infty}{\to} 1$ et pourtant le cours nous dit que ni u_n n'a de limite finie ou infinie.

3. **Même question que 2., si l'on suppose en outre que $v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.** On prend $v_n = 0$ et $u_n = (-1)^n$. Alors $u_n v_n = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ car u_n est bornée mais u_n n'a pas de limite.
4. **Même question que 2., si l'on suppose en outre que $v_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha \in \mathbb{R}^*$.** Dans ce cas, $v_n \neq 0$ pour n assez grand (on argumente comme dans la question 1.). Donc $u_n = (u_n v_n)/v_n \to L/\alpha$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$f(x) = \frac{\cos(x)+2}{x^3 + x\sin^2(x^2)+1} \text{ et } g = \exp \circ f.$$

1. **Montrer que f et g sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.** Les numérateur et dénominateur sont des sommes, composées et produits de fonctions continues (sin, cos et polynômes), donc f est continue et bien définie pour tout x n'annulant pas le dénominateur. Mais pour $x \geq 0$, il est plus grand que 1, donc ne s'annule pas. Comme exp est définie et continue sur $\mathbb{R}$, g est continue et définie sur $\mathbb{R}^+$ par composition.
2. **g a-t-elle une limite en 0^+ ? Si oui, quelle est cette limite ?** g est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc a une limite en 0^+ qui est $g(0) = \exp(f(0)) = e^3$.
3. **Montrer que f a une limite en $+\infty$ et donner cette limite.** Puisque $\sin(x^2) = O_{+\infty}(1)$, on a $x\sin(x^2) = o_{+\infty}(x^3)$ ainsi que 1 et x, donc le dénominateur est équivalent à $x^3 \to_{x\to+\infty} +\infty$. Le numérateur de f est borné en valeur absolue par 3, donc $f \to_{x\to+\infty} 0$.
4. **Montrer que g a une limite en $+\infty$ et donner cette limite. L'application g est-elle équivalente à une constante quand $x \to +\infty$?** exp est C^0 en 0 donc $g \to_{x\to+\infty} \exp(0) = 1$. Par le cours $g \to L \neq 0 \Leftrightarrow g \sim L$, donc $g \sim_{x\to+\infty} 1$.
5. **Montrer que le dénominateur de f s'annule au moins une fois en un point $b \in \mathbb{R}^*_-$.** Le dénominateur $\delta(x)$ est continu, $\delta(0) = 1 > 0$ et $\delta(x) \sim_{x\to-\infty} x^3$ (même argument qu'au 3.), donc $\delta \to_{x\to-\infty} -\infty$. Par le TVI appliqué à δ sur $\mathbb{R}^-$, δ s'annule au moins une fois en $b < 0$.
6. **Montrer que si le dénominateur de f s'annule en $b < 0$, alors $b \in]-1, 0[$.** Pour tout $x \leq -1$, $x^3 \leq -1$ donc $\delta(x) \leq -\sin^2(1) < 0$ car $\sin(1) \neq 0$ (sinon $\exists k \in \mathbb{Z}, 1 = k\pi$ ce qui est faux car $\pi > 3$.) Donc $\delta(b) = 0 \Rightarrow b > -1$.
7. **L'application $h(x) = x^3 f(x)$ at-t-elle une limite en $+\infty$? Si oui, quelle est cette limite ?** Puisque $2+\cos(x) \geq 1 > 0$, on a par la question 4. $x^3 f(x) \sim_{x\to+\infty} 2 + \cos x$ qui n'a pas de limite, donc $x^3 f(x)$ n'a pas de limite non plus.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

1. **Donner un exemple d'une telle fonction f, telle que de plus**

$$\exp(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\not\sim} \exp(\sqrt{x}).$$

Si $f(x) = \sqrt{|x|}+1$, alors $f$est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue comme composée et somme d'applications continues (valeur absolue, fraction rationnelle sans pôle, racine carrée), $f \sim_{+\infty} \sqrt{x}$ car $1 = o_{+\infty}(\sqrt{x})$ mais $\exp f = e \exp\sqrt{x} \not\sim \exp\sqrt{x}$.

2. **Donner un exemple d'une telle fonction f, telle que de plus**
$$\exp(f) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(\sqrt{x}),$$
et $\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \neq \sqrt{x}$. Soit $f(x) = \sqrt{|x|} + 1/(1+x^2) \neq \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$. On a $f \sim \sqrt{x}$ car $1/(1+x^2) \to_{+\infty} 0$ donc est un $o(\sqrt{x})$, f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue, et $\exp f = \exp(1/(1+x^2))\exp(\sqrt{x})$. Mais $1/(1+x^2) \to_{+\infty} 0$ donc par continuité $\exp(1/x) \to e^0 = 1$. Donc $\exp f/\exp\sqrt{x} \to 1$, soit $\exp f(x) \sim \exp\sqrt{x}$.
3. **Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $f - (1+\epsilon)\sqrt{x}$ a une limite infinie en $+\infty$.** Soit $g(x) = f(x) - (1+\epsilon)\sqrt{x}$. Pour x assez grand, $f \neq 0$ car $f \sim_{+\infty} \sqrt{x}$ donc on peut diviser par f : $g/f = 1 - (1+\epsilon)\sqrt{x}/f(x)$. Mais $\sqrt{x}/f(x) \to_{+\infty} 1$, donc $g/f \to_{+\infty} -\epsilon$, soit $g \sim_{+\infty} -\epsilon f \to_{+\infty} -\infty$.
4. **Soit $\epsilon \geq 0$. Montrer que $f + (1+\epsilon)\sqrt{x}$ a une limite infinie en $+\infty$.** On a $h(x) = f(x) + (1+\epsilon)\sqrt{x} \geq f \to_{+\infty} +\infty$ donc $h \to_{+\infty} +\infty$.
5. **Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que**
$$\frac{(f(x))^k}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$
Soit $k = 6$. Par le cours, $f^6 \sim_{+\infty} \sqrt{x}^6 = x^3$, donc $f^6/x^3 \to_{+\infty} 1$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$, et
$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$
Soient les suites $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = u_n + v_n$ et $s_n = u_n - v_n$.

1. **Trouver une relation simple entre r_{n+1} et r_n, ainsi qu'entre s_{n+1} et s_n.** On a $r_{n+1} = r_n$ et $s_{n+1} = \frac{1}{2}s_n$.
2. **Montrer qu'il existe $k \in]-1,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq k^n|s_0|$.** s_n est une suite géométrique de raison $k = 1/2$, donc $s_n = 2^{-n}s_0$ et $|s_n| \leq (1/2)^n|s_0|$.
3. **Montrer que $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$ ont une limite finie qu'on déterminera en fonction de u_0 et v_0.** $(r_n)_n$ est constante égale à $u_0 + v_0$ donc a pour limite ce nombre. s_n tend vers 0 par le cours car la raison $1/2$ vérifie $|1/2| < 1$.
4. **En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont une limite finie qu'on déterminera en fonction de u_0 et v_0.** On a $2u_n = r_n + s_n$ qui converge vers $u_0 + v_0$ donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}(u_0 + v_0)$. Comme $v_n = u_n - s_n$, $(v_n)_n$ converge aussi vers $\frac{1}{2}(u_0 + v_0)$.