

## Devoir surveillé - 17 février 2016

**Toute réponse doit être expliquée.** *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

### Question de cours

1. Donner la définition d'une suite tendant vers  $-\infty$ .
2. Montrer en utilisant uniquement les définitions du cours que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \Rightarrow u_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

### Exercice 1.

1. Existe-t-il  $x \in \mathbb{Q}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $x^n \notin \mathbb{Q}$  ?
2. Existe-t-il  $x \notin \mathbb{Q}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $x^n \in \mathbb{Q}$  ?
3. Existe-t-il  $x \notin \mathbb{Q}$  et  $n \in \mathbb{N}, n \notin \{0, 1\}$  tels que  $x^n \notin \mathbb{Q}$  ?

**Exercice** Soit  $A = \{\exp(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$ .

1. Déterminer  $\inf(A)$  et  $\sup(A)$ .
2. Ces bornes sont-elles atteintes par un élément de  $A$  ?

**Exercice** Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4n^3 + 4n\sqrt{n} - 10}{-1 + \sqrt{n} + n^2}$ .

1. Montrer que  $u_n$  est bien définie.
2. Donner un équivalent simple de  $u_n$ .
3. Montrer que  $n(u_n - 4n)$  converge et donner sa limite.

**Exercice** Soit  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites telles que  $u_n + v_n \rightarrow L$ .

1. Donner un exemple où aucune des deux suites ne converge vers une limite finie ou infinie.
2. Est-il possible que  $u_n$  converge vers une limite finie mais pas  $v_n$  ?

### Problème

1. Pour quels  $n \in \mathbb{Z}^*$  a-t-on  $n^2 = \sin n$  ?
2. Soit  $B = \{\frac{\sin(n) + m^2}{m^2 + n^2}, m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Z}^*\}$ .
3. Montrer que 1 est un majorant de  $B$ .
4. A-t-on  $1 \in B$  ?
5.  $B$  est-elle minorée ?
6. Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b > 0$ . Montrer que  $u_n = \frac{a+n^2}{n^2+b}$  a une limite et la déterminer.
7. Dédurre des questions précédentes  $\sup(B)$ .