Devoir surveillé - 17 février 2016

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Question de cours

1. **Donner la définition d'une suite tendant vers $-\infty$.**
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A.$$
2. **Montrer en utilisant uniquement les définitions du cours que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty \Rightarrow u_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.** Soit $A \in \mathbb{R}$. On peut toujours supposer $A \geq 1$ car on veut démontrer $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Soit alors N tel que $n \geq N$ implique $u_n \leq -A \leq -1$. On a donc $|u_n| \geq A \geq 1$ si bien que $u_n^2 \geq |u_n| \geq A$. Donc $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

Exercice 1.

1. **Existe-t-il $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x^n \notin \mathbb{Q}$?** Non : si $x = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, alors $x^n = p^n/q^n$ avec $p^n \in \mathbb{Z}$ et $q^n \in \mathbb{Z}^*$, donc $x^n \in \mathbb{Q}$.
2. **Existe-t-il $x \notin \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x^n \in \mathbb{Q}$?** Oui : si $x = \sqrt{2}$, le théorème d'Hipparque montre que $x \notin \mathbb{Q}$. Or $x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ et $n = 2 \in \mathbb{N}$.
3. **Existe-t-il $x \notin \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}, n \notin \{0, 1\}$ tels que $x^n \notin \mathbb{Q}$?** Oui : $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice. Soit $A = \{\exp(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$. Soit $u_n = \exp(1/n)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$ et exp est croissante, donc $u_n > \exp(0) = 1$ et 1 est un minorant de A. Or $1/n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et exp est continue en 0, donc $u_n \to 1$, ce qui montre que $1 = \inf A$. $1 \notin A$, donc l'inf n'est pas atteint. De plus la suite $(1/n)_n$ est décroissante et exp est croissante, donc u_n est décroissante. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_1 = e$. Donc e est un plus grand élément de A.

Exercice. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4n^3 + 4n\sqrt{n} - 10}{-1 + \sqrt{n} + n^2}$.

1. **Montrer que u_n est bien définie.** $n \geq 0$, donc les racines sont bien définies. Soit v_n le dénominateur. Pour $n = 0$, $v_n = -1 \neq 0$. Pour $n \geq 1$, $\sqrt{n} + n^2 - 1 \geq 1 > 0$, donc v_n est bien définie pour tout n.
2. **Donner un équivalent simple de u_n.** On a $n^\alpha = o(n^\beta)$ quand $\alpha < \beta$. Au numérateur, $4n\sqrt{n} = n^{3/2} = o(n^3)$ et $-10 = -10n^0 = o(n^3)$, donc le numérateur est équivalent à $4n^3$. De façon similaire, le dénominateur est équivalent à n^2. Au total, le quotient est équivalent à $4n^3/n^2 = 4n$.

3. Montrer que $n(u_n - 4n)$ converge et donner sa limite. On a

$$u_n - 4n = \frac{4n^3 + 4n\sqrt{n} - 10 - 4n^3 - 4n\sqrt{n} + 4n}{-1 + \sqrt{n} + n^2}$$

qui vaut $\frac{4n-10}{n^2+\sqrt{n}-1}$ qui est équivalent à $4/n$. Donc $n(u_n - 4n) \underset{n\to\infty}{\to} 4$.

Exercice. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\to} L$.

1. **Donner un exemple où aucune des deux suites ne converge vers une limite finie ou infinie.** Soit $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -u_n$. On a $u_n + v_n = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ mais le cours nous dit que u_n n'a pas de limite finie ou infinie, ainsi que donc v_n.
2. **Est-il possible que u_n converge vers une limite finie mais pas v_n ?** Non car $v_n = (v_n - u_n) + u_n$. On a $v_n - u_n \underset{n\to\infty}{\to} -L$ et si u_n converge, par somme v_n converge.

Problème.

1. **Pour quels $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $n^2 = \sin n$?** Si $|n| \geq 2$, a n'est pas possible car $n^2 \geq |n| > 1 \geq \sin n$. Si $n = \pm 1$, on aurait $1 = \sin \pm 1$. Notons que $\pm 1 \in]-\pi/2, \pi/2[$. Mais sur cet intervalle $\sin x < 1$ donc il n'y a pas de solution.
2. **Soit** $B = \{b_{m,n} = \dfrac{\sin(n) + m^2}{m^2 + n^2},\ m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Z}^*\}$.
3. **Montrer que 1 est un majorant de B.** On a $m^2 + \sin n \leq m^2 + 1$ donc $b_{m,n} \leq \frac{m^2+1}{m^2+n^2}$. Or $m^2 + 1 \leq m^2 + n^2$ car $n \in \mathbb{Z}^*$, donc $b_{m,n} \leq 1$.
4. **A-t-on $1 \in B$?** Non sinon $\exists (n, m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ tels que $\sin n + m^2 = m^2 + n^2$ soit $\sin n = n^2$ ce qui est impossible par la question 1.
5. **B est-elle minorée ?** Oui car $m^2 - \sin n \geq m^2 - 1 \geq 0$ donc $b_{m,n} \geq 0$.
6. **Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Montrer que $u_n = \frac{a+n^2}{n^2+b}$ a une limite et la déterminer.** $n^2 + a$ est un polynôme donc par le cours, $u_n \sim n^2/n^2 = 1$.
7. **Déduire des questions précédentes $\sup(B)$.** Soit La suite $(b_{m,1})_m \in B$ tend vers 1 qui est majorant. Donc $supB = 1$.