

# Unité d'Enseignement MAT203

## 1 Nombres réels

**Vrai-Faux 1.** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $A$  possède une borne supérieure, finie ou infinie.
2.  Si  $A$  est minorée, alors  $A$  possède une borne inférieure finie.
3.  Si  $x \leq \sup(A)$  alors  $x \in A$ .
4.  Si  $A$  contient au moins 2 réels distincts, alors  $A$  contient un rationnel.
5.  Si  $A$  est infinie, alors  $A$  contient une infinité d'irrationnels.
6.  Si  $A$  contient un intervalle de  $\mathbb{R}$ , contenant lui-même deux points distincts, alors  $A$  contient une infinité d'irrationnels.

**Vrai-Faux 2.** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . On note  $|A| = \{|x|, x \in A\}$ . Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $A$  est majorée, alors  $|A|$  possède une borne supérieure finie.
2.   $0$  est un minorant de  $|A|$ .
3.   $|A|$  possède toujours une borne inférieure finie.
4.   $|A|$  possède toujours une borne supérieure finie.
5.   $A$  est bornée si et seulement si  $|A|$  est majorée.
6.  Si  $A$  est un intervalle, alors  $|A|$  est un intervalle.
7.  Si  $|A|$  est un intervalle, alors  $A$  est un intervalle.
8.  Si  $A$  est un intervalle fermé, alors  $|A|$  est un intervalle fermé.

**Vrai-Faux 3.** Soit  $a$  un réel quelconque. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $(\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon)$ , alors  $a < 0$ .
2.  Si  $(\forall \varepsilon > 0, a > 1 - \varepsilon)$ , alors  $a \geq 1$ .
3.  Si  $(\forall \varepsilon > 0, a > 1 - \varepsilon^2)$ , alors  $(\forall \varepsilon > 0, a > 1 - 2\varepsilon)$ .
4.  Si  $(\forall \varepsilon > 0, a > 1 - \varepsilon)$ , alors  $(\forall \varepsilon \geq 0, a > 1 - \varepsilon^2)$ .
5.  Si  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, a > 1/\sqrt{n})$ , alors  $a > 1$ .
6.  Si  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, a < 1/\sqrt{n})$ , alors  $a < 0$ .

**Vrai-Faux 4.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $a + b$  est rationnel, alors soit  $a$  est rationnel soit  $b$  est rationnel.
2.  Si  $a + b$  est irrationnel, alors soit  $a$  est irrationnel soit  $b$  est irrationnel.
3.  Si  $a$  est rationnel, alors sa partie décimale est rationnelle.
4.  Si  $a$  est irrationnel, alors la partie décimale de  $a + b$  est irrationnelle.
5.  Si la partie décimale de  $a$  est rationnelle, alors  $a$  est rationnel.

**Vrai-Faux 5.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  $\boxtimes |ab| = |a| |b|$ .
2.  $\boxtimes |a| - |b| \leq |a - b|$ .
3.  $\square |a - b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ .
4.  $\boxtimes |a - b| = |a - (a + b)/2| + |(a + b)/2 - b|$ .
5.  $\square$  Si  $|a - b| < |a|$ , alors  $|ab| = ab$ .
6.  $\square \lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$ .
7.  $\boxtimes \lfloor a + b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$ .
8.  $\boxtimes \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$ .

**Exercice 1.** Montrer que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{1-x}{2}$ .

**Exercice 2.** 1) A quel intervalle appartient  $x^2$  si  $x \in ]-5, 1[$  ?

2) Quel est l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation  $1/x < -2$  ?

**Exercice 3.** On considère le sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  défini par

$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3}; x \in [-1, 1], y \in [-1, 1] \right\}.$$

Trouver un majorant et un minorant de  $A$ .

**Exercice 4.** Dessiner les sous-ensembles suivants ( $a$  est un réel fixé,  $\varepsilon > 0$ ) :

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\}, \quad I' = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < 1\}, \quad I'' = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 5| < 2\}$$

$$I_{a,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}, \quad K_{a,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| > \varepsilon\}$$

**Exercice 5.** Définir  $\tilde{A}$  l'aide d'une valeur absolue les encadrements suivants :

$$x \in [-2, 2] \quad x \in ]-3, 5[ \quad x \in [-1, 6]$$

**Exercice 6.** Démontrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  donnés, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2} \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

**Exercice 7.** Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

**Exercice 8.** Pour chacun des ensembles de réels suivants :

$$\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(-1)^n/n, n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \{(-1)^n n, n \in \mathbb{N}\},$$

$$\left\{ \frac{n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{m+n}{m+2n}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

**Exercice 9.** On considère les ensembles de réels suivants :

$$\{x \in \mathbb{R}, |x| > 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R}, x^3 < 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^*, 1/x \leq 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^*, 1/x > 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leq 0\}$$

1. Ecrire l'ensemble comme un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
2. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
3. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
4. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

**Exercice 10.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $A \subset B$  implique  $\sup(A) \leq \sup(B)$  et  $\inf(A) \geq \inf(B)$ .
2. Montrer que  $A \cup B$  admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\} .$$

3. Montrer que si l'intersection  $A \cap B$  est non vide, alors elle admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cap B) \geq \max\{\inf(A), \inf(B)\} .$$

4. On note  $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ . Montrer que  $A + B$  admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) .$$

**Exercice 11.** Soient  $A$  et  $B$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $A \cap B$  est un intervalle.
2. Montrer que si  $A \cap B$  est non vide, alors  $A \cup B$  est un intervalle.
3. Montrer par un exemple que  $A \cup B$  peut être un intervalle même si  $A \cap B$  est vide.
4. On note  $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ . Montrer que  $A + B$  est un intervalle.

**Exercice 12.** Soient  $x$  et  $y$  deux rationnels distincts tels que  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{y}$  soient irrationnels.

1. On considère les deux réels  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  et  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ . Montrer que leur produit est rationnel, leur somme irrationnelle. En déduire qu'ils sont irrationnels.
2. Soient  $r$  et  $s$  deux rationnels. Montrer que  $r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$  est irrationnel.
3. Montrer par des exemples que  $\sqrt{x}\sqrt{y}$  peut être rationnel ou irrationnel.
4. Montrer que les réels suivants sont irrationnels.

$$1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2, \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$$

**Exercice 13.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant deux points distincts. Montrer que  $I$  contient :

1. une infinité de rationnels,
2. une infinité d'irrationnels,
3. une infinité de nombres décimaux,

## 2 Suites numériques

**Vrai-Faux 6.** Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $x$  est rationnel, la suite des décimales de  $x$  est périodique.
2.  Si  $x$  est décimal, la suite des décimales de  $x$  est constante à partir d'un certain rang.
3.  Toute suite récurrente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, est périodique à partir d'un certain rang.
4.  Si  $F$  est une application croissante, la suite  $(F^{on}(u_0))$  est croissante.
5.  Si  $f$  est une application croissante, la suite  $(f(n))$  est croissante.
6.  Si  $P$  est une application polynôme, la suite  $(P(n))$  est monotone à partir d'un certain rang.
7.  La suite  $(e^{ni\pi/4})$  est périodique de période 4.
8.  La suite  $((-1)^k)$  est une suite extraite de la suite  $(e^{ni\pi/4})$ .
9.  On peut extraire de la suite  $(e^{ni\pi/4})$  une sous-suite constante.

**Vrai-Faux 7.** Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Toute suite croissante et minorée tend vers  $+\infty$ .
2.  Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$ .
3.  Toute suite croissante et bornée converge.
4.  Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5.  Si la suite des décimales de  $x$  converge, alors  $x$  est un nombre rationnel.
6.  Si  $r \leq 1$  alors  $(\cos(n) r^n)$  tend vers 0.
7.  Si  $r < 1$  alors  $(\cos(n) r^n)$  tend vers 0.

**Vrai-Faux 8.** Soit  $(u_n)$  une suite de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $(u_n)$  tend vers 0, alors pour tout  $n$ ,  $u_n < 1$ .
2.  Si  $(u_n)$  tend vers 0, alors  $u_n < 1$  pour  $n$  assez grand.
3.  Si  $(u_n)$  tend vers 2, alors  $u_n > 1$  pour  $n$  assez grand.
4.  Si  $(u_n)$  tend vers 0 alors  $(\cos(n) u_n)$  tend vers 0.
5.  Si  $(u_n)$  tend vers 1 alors  $(\cos(n) u_n)$  tend vers 1.
6.  Si  $(u_n)$  tend vers 1 alors  $(\cos(n) u_n)$  est bornée.
7.  Si la suite  $(|u_n|)$  converge vers  $l$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$  ou vers  $-l$ .
8.  Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors la suite  $(|u_n|)$  converge vers  $|l|$ .
9.  Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors la suite  $(u_{n^2})$  converge vers  $l$ .
10.  Si la suite  $(u_n)$  converge vers 1, alors la suite  $(u_n^2)$  converge vers 1.
11.  Si la suite  $(u_n)$  converge vers 1, alors la suite  $(u_n^n)$  converge vers 1.

**Vrai-Faux 9.** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si pour tout  $n$ ,  $(u_n) \geq \sqrt{n}$  alors  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .
2.  Si pour tout  $n$ ,  $(u_n) \geq -\sqrt{n}$  alors  $(u_n)$  tend vers  $-\infty$ .
3.  Si à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et si les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  tendent vers 1, alors  $(v_n)$  tend vers 1.
4.  Si à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et si les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent, alors  $(v_n)$  converge.
5.  Si à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et si les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent, alors  $(v_n)$  est bornée.
6.  Si  $u_n = o(v_n)$  alors  $u_n = O(v_n)$ .
7.  Si  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$  alors  $u_n \sim v_n$ .
8.  Si  $u_n \sim v_n$  alors  $(u_n/v_n)$  est bornée.
9.  Si  $u_n \sim v_n$  alors  $u_n - v_n$  tend vers 0.
10.  Si  $u_n \sim v_n$  alors  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

**Vrai-Faux 10.** Soit  $(u_n)$  une suite de réels croissante et non majorée. Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi) :

1.  La suite  $(u_n)$  est positive à partir d'un certain rang.
2.  La suite  $(u_n^2)$  est croissante.
3.  La suite  $(\sqrt{|u_n|})$  tend vers  $+\infty$ .
4.  La suite  $(\exp(-u_n))$  tend vers 0.
5.  La suite  $(1/u_n)$  est décroissante.

**Vrai-Faux 11.** Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $n2^n = O(2^n)$ .
2.   $2^{n+1} = O(2^n)$ .
3.   $2^{n^2+n} = O(2^{n^2})$ .
4.   $n2^n = o(3^n)$ .
5.   $n2^n/\sqrt{n+1} = O(2^n)$ .
6.   $n2^n/\sqrt{n^2+1} \sim 2^n$ .
7.   $3^n/n = O(2^n)$ .
8.   $2^n/n = o(2^n)$ .
9.   $n2^{-n} = O(2^{-n})$ .
10.   $n3^{-n} = o(2^{-n})$ .
11.   $n2^{-n}/\sqrt{n+1} = O(2^{-n})$ .
12.   $n2^{-n}/\sqrt{n^2+1} \sim 2^{-n}$ .
13.   $3^{-n}/n = O(2^{-n})$ .
14.   $2^{-n}/n = o(2^{-n})$ .

**Exercice 14.** On considère les suites  $(u_n)$  définies par :

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad u_n = \frac{2n+3}{2n+1}, \quad u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1}, \quad u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1}$$

Pour chacune de ces suites :

1. Montrer qu'elle converge vers 1.
2. Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, déterminer en fonction de  $\varepsilon$  le rang  $n_0$  à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle  $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ .

**Exercice 15.** On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies comme suit :

1.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

2.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

3.

$$u_0 = a > 0, \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

4.

$$u_0 = a > 0, \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{2}{1/u_n + 1/v_n}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

**Exercice 16.** Soit  $(u_n)$  une suite de réels.

1. Montrer que si les suites extraites  $(u_{3n})$ ,  $(u_{3n+1})$  et  $(u_{3n+2})$  convergent vers la même limite, alors  $(u_n)$  converge.
2. Montrer que si les suites extraites  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  convergent, alors  $(u_n)$  converge.
3. Montrer que si les suites extraites  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{n^2})$  convergent, alors  $(u_n)$  converge.
4. Montrer par un exemple que les suites extraites  $(u_{3n})$ ,  $(u_{3n+1})$ ,  $(u_{3n+2})$  et  $(u_{n^2})$  peuvent converger sans que  $(u_n)$  converge.

**Exercice 17.** Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{\ln n}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \frac{n^2 \ln n}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \frac{10^n}{n!} = o((3/2)^{-n}).$$

2. Suites tendant vers  $+\infty$  :

$$10^n = o\left(\frac{\sqrt{n!}}{(4/3)^n}\right), \quad n^4 2^{n^2} = o((6/5)^{n^3}), \quad (\ln n)^4 \sqrt{n} = o(n^2 \ln(\ln n)).$$

**Exercice 18.** Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{\ln(n^2 + n)}{n} = O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right), \quad \frac{n^2 + \ln(n^2)}{(2n+1)^3} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{3}{2^{2n+1} + n^4} = O(4^{-n}).$$

2. Suites tendant vers  $+\infty$  :

$$\frac{2n + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n+3}} = O(n^{2/3}), \quad \ln(n^2 + 2n + 3) = O(\ln(n)), \quad \frac{4n^2 + 3n \cos(n)}{5n - \sin(n+3)} = O(n).$$

**Exercice 19.** Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{4n^3 - \sqrt{n^5 + 3n^4}}{(\sqrt{2n} + \sqrt{n})^4} \sim \frac{1}{n}, \quad \frac{\ln(2^{n+\sqrt{n}})}{\ln(2^{n\sqrt{n}})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n \cos(n)}}{\sqrt{n^3 + n^2 \sin(n)}} \sim n^{-5/6}.$$

2. Suites tendant vers  $+\infty$  :

$$\frac{2n + \ln(n^3)}{\sqrt{4n + 5}} \sim \sqrt{n}, \quad \frac{\ln(2^{n^2+3n})}{\ln(2^{n\sqrt{n}})} \sim \sqrt{n}, \quad \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n \cos(n)}}{\sqrt{n + \sin(n)}} \sim \sqrt[6]{n}.$$

**Exercice 20.** Démontrer les résultats suivants.

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^{1/2}}\right)^n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^6 + 2^{3n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1} + (-1)^n}{n^{-3} + (-1)^{3n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1/2} + (-1/2)^n}{n^{-3} + (-1/2)^{3n}} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} = 1.$$

**Exercice 21.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $A$  est *dense* dans  $\mathbb{R}$ , si pour tous réels  $a, b$  tels que  $a < b$ ,  $A \cap ]a, b[ \neq \emptyset$ .

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Montrer que si  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , alors l'intervalle  $]a, b[$  contient une infinité d'éléments de  $A$ .
2. Soit  $A$  une partie dense dans  $\mathbb{R}$ , et  $x$  un réel quelconque. Montrer que  $x$  est la limite d'une suite d'éléments de  $A$ . Indication : considérer les intervalles  $]x - 1/n, x + 1/n[$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Réciproquement, soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  telle que tout réel soit limite d'une suite d'éléments de  $A$ . Montrer que  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 22.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels. Pour tout  $n \geq 1$ , on note

$$c_n = \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)$$

la moyenne arithmétique des  $n$  premiers termes. La suite  $(c_n)$  est appelée « suite des moyennes de Cesaro » de  $(u_n)$ .

1. Montrer que si la suite  $(u_n)$  converge vers 0, alors la suite  $(c_n)$  converge aussi vers 0.
2. En déduire que si la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors la suite  $(c_n)$  converge aussi vers  $l$ .
3. Pour  $u_n = (-1)^n$ , montrer que  $(c_n)$  tend vers 0.
4. Soit  $(u_n)$  une suite de réels telle que la suite  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers  $l$ . Montrer que la suite  $(u_n/n)$  converge également vers  $l$ .
5. Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs telle que la suite  $(u_{n+1}/u_n)$  converge vers  $l > 0$ . Montrer que la suite  $(\sqrt[n]{u_n})$  converge également vers  $l$ .

**Exercice 23.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = F(u_n)$ , avec :

$$F(x) = \frac{x^3}{4}.$$

1. Représenter le graphe de  $F$ . Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite  $(u_n)$  pour  $u_0 = -3$ ,  $u_0 = -1$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_0 = 3$ .
2. Déterminer les points fixes de  $F$ .
3. Montrer que  $F([0, 2]) \subset [0, 2]$  et que  $F([-2, 0]) \subset [-2, 0]$ .
4. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante, pour tout  $u_0 \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, 2[$ , croissante pour tout  $u_0 \in ]-2, 0[ \cup ]2, +\infty[$ .
5. Donner la limite de  $(u_n)$  selon les valeurs de  $u_0$ .

**Exercice 24.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = F(u_n)$ , avec :

$$F(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

1. Représenter le graphe de  $F$ . Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite  $(u_n)$  pour  $u_0 = -1$ , puis  $u_0 = 1$ . Montrer que 0 est le seul point fixe de  $F$ .
2. On suppose  $u_0 < 0$ . Montrer que  $(u_n)$  est croissante et tend vers 0.
3. On suppose  $u_0 > 0$ . Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et tend vers 0.

**Exercice 25.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = F(u_n)$ , avec :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x + x^2).$$

1. Représenter le graphe de  $F$ . Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite  $(u_n)$  pour  $u_0 = 1/2$ ,  $u_0 = 2$ ,  $u_0 = -1/2$ . Déterminer les points fixes de  $F$ . Montrer que  $F([0, 1]) \subset [0, 1]$  et que  $F([-1, 0]) \subset [-1, 0]$ .
2. On suppose  $u_0 \in [0, 1[$ . Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et donner sa limite.
3. On suppose  $u_0 > 1$ . Montrer que  $(u_n)$  est croissante et tend vers  $+\infty$ .
4. On suppose  $u_0 \in [-1, 0]$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| \leq 2^{-n}$ . En déduire que  $(u_n)$  tend vers 0.
5. On suppose  $u_0 < -1$ . Montrer qu'on peut se ramener aux trois cas précédents. Donner la limite de  $(u_n)$  selon les valeurs de  $u_0$ .

**Exercice 26.** Soit  $a$  un réel tel que  $0 < a < 1$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a$ , et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n + 1}.$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{n + 1}.$$

4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = 1 + \frac{a - 1}{n!}.$$

**Exercice 27.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2n^2 - 2}{n^2}.$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 2$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers 2.

**Exercice 28.** Soit  $a$  un réel et  $r$  un réel non nul. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r u_n + a.$$

1. Montrer que la suite  $(u_{n+1} - u_n)$  est une suite géométrique de raison  $r$ .
2. On pose  $\lambda = a/(1 - r)$ . Montrer que la suite constante dont tous les termes sont égaux à  $\lambda$  est solution de l'équation de récurrence  $(E)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n - \lambda)$  est une suite géométrique.
4. En déduire l'expression suivante de  $u_n$  :

$$u_n = \frac{a}{1 - r} + \left(u_0 - \frac{a}{1 - r}\right) r^n.$$

**Exercice 29.** On considère l'équation de récurrence qui engendre la suite de Fibonacci :

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Soit  $r$  un réel. Montrer qu'une suite géométrique de raison  $r$  vérifie  $(E)$  si et seulement si  $r$  est solution de l'équation  $r^2 = r + 1$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , définissons  $u_n = a\phi^n + b(-1/\phi)^n$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels, et  $\phi$  est le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  vérifie l'équation de récurrence  $(E)$ .

3. Calculer les valeurs de  $a$  et  $b$  telles que

$$\begin{cases} a + b & = 1 \\ a\phi - b/\phi & = 1 \end{cases}$$

4. En déduire l'expression suivante du  $n$ -ième nombre de Fibonacci :

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \left( (1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1} \right).$$

5. À partir de cette expression, retrouver le résultat du cours :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi.$$

### 3 Limites et continuité

**Vrai-Faux 12.** Soit  $a$  un réel et  $f$  une application définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$  sauf peut-être en  $a$ . Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $f$  admet une limite finie en  $a$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .
2.  Si  $f$  admet une limite finie en  $a$  alors  $f$  est monotone au voisinage de  $a$ .
3.  Si  $f$  admet une limite en  $a$ , alors  $f$  admet une limite à droite en  $a$ .
4.  Si  $f$  admet une limite à gauche et une limite à droite en  $a$  alors  $f$  admet une limite en  $a$ .
5.   $f$  admet  $l$  pour limite à gauche et pour limite à droite en  $a$  si et seulement si  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

**Vrai-Faux 13.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0, +\infty[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $f$  n'est pas bornée, alors  $f$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2.  Si  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f$  est monotone au voisinage de  $+\infty$ .
3.  Si pour toute suite  $(x_n)$  convergeant vers  $+\infty$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers 1, alors  $f$  a pour limite 1 en  $+\infty$ .
4.  Si la suite  $(f(n))$  converge vers 0 et la suite  $(f(n + 1/2))$  converge vers  $1/2$ , alors  $f(x)$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .
5.  Si  $f$  est strictement positive au voisinage de  $+\infty$ , alors la limite de  $f$  en  $+\infty$ , si elle existe, est strictement positive.

**Vrai-Faux 14.** Soit  $a$  un réel et  $f$  une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1.   $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \leq \eta, |f(x)| \leq \varepsilon$
2.   $\forall \varepsilon \in ]0, 1[, \exists \eta \in ]0, 1[, 0 < |x| \leq \eta \implies |f(x)| \leq \varepsilon$
3.   $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x)| \leq \varepsilon$
4.   $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, 0[ \cup ]0, \eta], |f(x)| < \varepsilon$
5.   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, 0[ \cup ]0, \eta], |f(x)| < (1/n)$
6.   $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, |x| \leq (1/m) \implies |f(x)| \leq (1/n)$
7.   $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, 0 < |x| \leq (1/m) \implies |f(x)| \leq (1/n^2)$

**Vrai-Faux 15.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(1) = 1$ . Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?)

1.   $f$  est bornée au voisinage de 0.
2.   $f$  est monotone au voisinage de 0.
3.   $f$  est minorée par 1 au voisinage de 0.
4.   $f$  est minorée par 0 au voisinage de 0.
5.   $f$  est majorée par 2 au voisinage de 0.
6.  la fonction  $x \mapsto f(1/x)$  est bornée au voisinage de 0.
7.  la fonction  $x \mapsto \ln(f(x))$  est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

**Vrai-Faux 16.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi?)

1.   $\lim_{x \rightarrow 0} f(1-x) = 0$
2.   $\lim_{x \rightarrow 0} 1/f(x) = 1$
3.   $\lim_{x \rightarrow 1} 1 - 1/f(1-x) = 0$
4.   $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{f(\sqrt{x})} = 1$
5.   $\lim_{x \rightarrow 0} f(\cos(x)) = 0$
6.   $\lim_{x \rightarrow 0} 1/f(\sin(x)) = 1$
7.   $\lim_{x \rightarrow 0} f(e^{-x}) = 1$
8.   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(e^{-x})) = 0$

**Vrai-Faux 17.** Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de 0*. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi?

1.   $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^2)$
2.   $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x)$
3.   $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(\sqrt{|x|})$
4.   $\frac{1}{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}} = o(1/\sqrt{|x|})$
5.   $\frac{1}{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}} = O(1/|x|)$
6.   $\ln(|x|) = o(1/|x|)$

**Vrai-Faux 18.** Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de  $+\infty$* . Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi?

1.   $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^2)$
2.   $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^3)$
3.   $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(x^2)$
4.   $\frac{1}{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}} = o(1/x^2)$
5.   $\frac{1}{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}} = O(\sin(1/x^3))$
6.   $\ln(x) = o(x)$
7.   $e^{2x} = O(e^x)$

**Vrai-Faux 19.** Soit  $f$  une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Toutes les affirmations suivantes concernent les propriétés de  $f$  au voisinage de 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.  Si  $f(x)$  est équivalent à  $x$ , alors  $f$  est croissante au voisinage de 0.
2.  Si  $f(x)$  est équivalent à  $x$ , alors  $f^2(x)$  est équivalent à  $x^2$ .
3.  Si  $f(x)$  est un grand O de  $x$ , alors  $f^2(x)$  est un petit o de  $x$ .
4.  Si  $f(x)$  est dominé par  $x$ , alors  $f(x) - x$  est négligeable devant  $x$ .
5.  Si  $f(x)$  est équivalent à  $x$ , alors  $f(x) - x$  est négligeable devant  $x$ .

**Vrai-Faux 20.** Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $f$  est bornée sur  $[0, 1]$ .
2.   $f([0, 1])$  est un intervalle fermé borné.
3.  si le produit  $f(0)f(1)$  est strictement positif, alors  $f$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ .
4.  si le produit  $f(0)f(1)$  est strictement négatif, alors  $f$  s'annule sur  $[0, 1]$ .
5.  si le produit  $f(0)f(1)f(1/2)$  est strictement négatif, alors  $f$  s'annule en au moins deux points distincts de  $[0, 1]$ .
6.  les produits  $f(0)f(1/2)$  et  $f(1/2)f(1)$  sont strictement négatifs, alors  $f$  s'annule en au moins deux points distincts de  $[0, 1]$ .
7.  pour tout  $y \in f([0, 1])$ , l'équation  $f(x) = y$  a au plus une solution dans  $[0, 1]$ .

**Vrai-Faux 21.** Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.  Il existe une application continue et surjective de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^*$ .
2.  Il existe une application continue et bijective de  $\mathbb{R}$  vers  $] - 1, 1[$ .
3.  Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une application continue et bijective de  $\mathbb{R}$  vers  $] - \varepsilon, +\varepsilon[$ .
4.  Il existe une application continue et bijective de  $[-1, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ .
5.  Il existe une application continue et bijective de  $] - 1, 1[$  vers  $\mathbb{R}$ .
6.  Il existe une application continue et strictement croissante de  $] - 1, 1[$  vers  $[-1, 1]$ .
7.  Il existe une application continue et strictement croissante de  $[-1, 1[$  vers  $] - 1, 1]$ .
8.  Il existe une application continue et strictement décroissante de  $[-1, 1[$  vers  $] - 1, 1]$ .

**Exercice 30.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $]0, 1]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Démontrer :

1. La limite à droite de  $f$  en 0 est  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x \leq (1/m) \implies f(x) \geq n$$

2. La limite à droite de  $f$  en 0 est  $+\infty$  si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)$  de réels strictement positifs, convergeant vers 0, la suite  $(f(x_n))$  tend vers  $+\infty$ .
3. La limite à droite de  $f$  en 0 est  $+\infty$  si et seulement si pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x - a) = +\infty$$

4. La limite à droite de  $f$  en 0 est  $\pm\infty$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/f(1/x) = 0$
5. Si la limite à droite de  $f$  et de  $g$  en 0 est  $+\infty$ , alors il en est de même pour  $f + g$  et  $f * g$ .

**Exercice 31.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $a$  et  $l$  deux réels. Pour chacune des propriétés suivantes, que peut-on dire de  $f$  lorsqu'elle est vérifiée ?

1.  $\forall \varepsilon > 0, |x - a| \leq 1 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
2.  $\exists \eta > 0, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq 1$
3.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x - a \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
4.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leq \eta \implies f(x) - l \leq \varepsilon$
5.  $\exists \eta > 0, \forall \varepsilon > 0, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$

**Exercice 32.** Démontrer que les applications suivantes n'ont pas de limite à droite en 0 (ni finie, ni infinie). On rappelle que si  $x$  est un réel,  $[x]$  désigne sa partie entière et  $D(x)$  sa partie décimale.

1.  $f : x \mapsto \sin(1/x)$
2.  $f : x \mapsto D(1/x)$
3.  $f : x \mapsto \tan(1/x)$
4.  $f : x \mapsto \ln(x) \cos(1/x)$
5.  $f : x \mapsto (-1)^{[1/x]}$
6.  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

**Exercice 33.** Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite en  $+\infty$  (ni finie, ni infinie).

1.  $f : x \mapsto \sin(x)$
2.  $f : x \mapsto \tan(x)$
3.  $f : x \mapsto \ln(x) \cos(x)$
4.  $f : x \mapsto (-1)^{[x]}$
5.  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
6.  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Exercice 34.** Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 + x^3}}{|2x + x^2|} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{|x|}}{x - \sqrt{|x|}} = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{|x|} + \sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{|x|} - \sqrt{|x|}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{2}{3}$$

**Exercice 35.** Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x - 3} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 3x^4 + 1}}{\sqrt{4x^4 - 3}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)(e^x + 2)} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)(e^x + 2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x-1} = 0$$

**Exercice 36.** Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2)^{1/x} = 1$$

**Exercice 37.** Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \ln^2(x) e^{-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\ln(x) + \cos(x))}{x^2 + \sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sqrt[3]{x}}}{x^3 \ln^3(x)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2(x)}$$

**Exercice 38.** Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}} = 4 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}-1) \ln(\ln(x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(x)}{2x-\pi} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1-\sin(x)) \tan(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} = \sqrt{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\pi/4} = \sqrt{2}$$

**Exercice 39.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle contenant 0. Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de 0*.

1. Si  $f(x) = O(x^2)$  alors  $f = o(x)$ .
2. Si  $xf(x) = O(x^2)$  alors  $f = O(x)$ .
3. Si  $f(x) = o(x)$  alors  $f(x) = o(\sqrt{x})$ .
4. Si  $f(x) - x = o(x)$  alors  $f(x) \sim x$ .
5. Si  $f(x) \sim x$  alors  $f(x) - x = o(x)$ .
6. Si  $f(x) = O(x^2)$  alors  $f(x) - x \sim -x$ .

**Exercice 40.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[A, +\infty[$ . Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de  $+\infty$* .

1. Si  $f(x) = O(x)$  alors  $f(x) = o(x^2)$ .
2. Si  $xf(x) = O(x^2)$  alors  $f = O(x)$ .
3. Si  $f(x) = o(\sqrt{x})$  alors  $f(x) = o(x)$ .
4. Si  $f(x) - x = o(x)$  alors  $f(x) \sim x$ .
5. Si  $f(x) \sim x$  alors  $f(x) - x = o(x)$ .
6. Si  $f(x) = O(\sqrt{x})$  alors  $f(x) - x \sim -x$ .

**Exercice 41.** Justifier les équivalents suivants, au voisinage de 0

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x} \sim 2x \quad ; \quad \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - x} \sim \frac{1}{x}$$

$$x^2 - 2x^3 \sin(1/x) \sim x^2 \quad ; \quad \frac{x + x^2 \sin(1/x)}{x^2 - x^3 \cos(1/x)} \sim \frac{1}{x}$$

**Exercice 42.** Justifier les équivalents suivants, au voisinage de  $+\infty$

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x} \sim x \quad ; \quad \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - x^4} \sim -\frac{1}{x}$$

$$[x] \sim x \quad ; \quad \frac{x^2 + \cos(x)}{x + \sin(x)} \sim x$$

$$\frac{e^{2x} - 2}{e^x - 1} \sim e^x \quad ; \quad \frac{e^{-2x} - 2e^{-x}}{e^{-x} - 1} \sim 2e^{-x}$$

**Exercice 43.** Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, démontrer *directement* qu'elle est continue en tout point de son domaine de définition, sans utiliser les théorèmes du cours.

1.  $f : x \mapsto x^2$
2.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$
3.  $f : x \mapsto \sqrt{x}$

**Exercice 44.** Si  $x$  est un réel, on note  $[x]$  sa partie entière et  $D(x) = x - [x]$  sa partie décimale. Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes : dire en quels points de  $\mathbb{R}$  elle est continue, continue à gauche ou continue à droite, et le démontrer.

1.  $f : x \mapsto D(x)$
2.  $f : x \mapsto D(1 - x)$
3.  $f : x \mapsto D(1/x)$
4.  $f : x \mapsto x[1/x]$
5.  $f : x \mapsto [x] + 2D(x)$
6.  $f : x \mapsto [x] + D(x)^2$
7.  $f : x \mapsto \sqrt{[x]} + D(x)$
8.  $f : x \mapsto [\cos(1/x)]$
9.  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Exercice 45.** Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes : déterminer son domaine de définition, représenter son graphe, et montrer qu'elle se prolonge par continuité en une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

1.  $f : x \mapsto (x^2 + x)/\sqrt{|x|}$
2.  $f : x \mapsto x \cos(1/x)$
3.  $f : x \mapsto (1/x^2)e^{-1/x^2}$
4.  $f : x \mapsto (1/(x^2 - 1))e^{-1/(x^2 - 1)^2}$

**Exercice 46.**

1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , continue en 0, et telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$   
Démontrer par récurrence que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(2^{-n}x)$   
En déduire que  $f$  est constante.
2. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , continue en 1, et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$$

Démontrer par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(x^{1/2^n})$$

En déduire que  $f$  est constante.

**Exercice 47.**

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue sur  $\mathbb{R}$ . On définit  $g$  par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(\sqrt{x}) - f(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démontrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue en 0. On suppose que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue en 0. On suppose que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$$

Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

4. Soit  $f$  une fonction de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , croissante. On suppose que :

$$\forall y \in [f(0), f(1)], \exists x \in [0, 1], f(x) = y$$

Démontrer que  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 48.** Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, définie sur un intervalle  $I$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  : déterminer le sens de variation de  $f$ . Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  dans  $I$ . Donner un intervalle d'approximation d'amplitude  $10^{-2}$  pour chaque solution.

1.  $I = \mathbb{R}, f : x \mapsto x^3 + 1$
2.  $I = \mathbb{R}, f : x \mapsto x^5 + 1$
3.  $I = \mathbb{R}, f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$
4.  $I = ]-2, 0[, f : x \mapsto 2x\sqrt{x+2} + 1$
5.  $I = ]0, 1[, f : x \mapsto x - \cos(x)$
6.  $I = ]0, \pi/2[, f : x \mapsto \tan(x) - x + 2$

**Exercice 49.** Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, définie sur un intervalle  $I$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  : déterminer le sens de variation de  $f$ . Déterminer  $f(I)$ . Démontrer que  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I)$ .

1.  $I = [0, +\infty[, f : x \mapsto x^2$
2.  $I = \mathbb{R}, f : x \mapsto x^3$
3.  $I = \mathbb{R}, f : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$
4.  $I = [0, \pi/2[, f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\cos(x)}$

## 4 Dérivabilité et convexité

**Vrai-Faux 22.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Soit  $a$  un point de  $I$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  est prolongeable par continuité en  $a$ .
2.  Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$ , alors  $f$  est continue sur un intervalle ouvert contenant  $a$ .
3.  Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .
4.  Si  $f$  est dérivable à gauche en  $a$ , alors  $f$  est continue à gauche en  $a$ .
5.  Si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$ .
6.  Si la tangente au graphe de  $f$  en  $a$  est verticale,  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ .

**Vrai-Faux 23.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivables sur un intervalle ouvert  $I$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  La dérivée de  $f + g$  est la somme des dérivées de  $f$  et de  $g$ .
2.  La dérivée de  $fg$  est le produit des dérivées de  $f$  et de  $g$ .
3.  Le quotient  $f/g$  est dérivable en tout point où  $g$  ne s'annule pas.
4.  La fonction  $x \mapsto \exp(f(x)g(x))$  est dérivable sur  $I$ .
5.  La fonction  $x \mapsto f(\exp(x))$  est toujours dérivable sur  $I$ .

**Vrai-Faux 24.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors  $f'$  est continue sur  $I$ .
2.  Si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ .
3.  Si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
4.  Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  alors ses dérivées successives sont toutes continues sur  $I$ .
5.  Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors  $|f|$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
6.  Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ , alors  $x \mapsto e^{f(x)}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

**Vrai-Faux 25.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si la dérivée de  $f$  s'annule en  $x_0 \in I$ , alors  $x_0$  est un extremum local pour  $f$ .
2.  Si  $f$  prend la même valeur en deux points distincts, alors la dérivée de  $f$  s'annule entre ces deux points.
3.  Si  $f$  admet un maximum local, alors  $f$  admet un maximum global.
4.  Si  $f$  admet un maximum local, alors la dérivée de  $f$  s'annule en ce point.
5.  Si la dérivée de  $f$  est positive ou nulle sur  $I$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .
6.  Si la dérivée de  $f$  est strictement positive sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
7.  Si  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , alors sa dérivée est strictement positive sur  $I$ .
8.  Soient  $x, y$  avec  $x \neq y$  et  $f(y) - f(x) = y - x$ , alors il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f'(c) = 1$ .

**Vrai-Faux 26.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.  Si  $f$  est convexe sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

2.  Si  $f$  est convexe sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable à droite en tout point de  $I$ .
3.  Si  $f$  est convexe sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .
4.  Si  $f$  est convexe et dérivable sur  $I$ , alors la dérivée de  $f$  est croissante sur  $I$ .
5.  Si  $f$  est convexe et dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ .
6.  Si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ , et si sa dérivée seconde est positive, alors  $f$  est convexe sur  $I$ .

**Exercice 50.** Pour chacune des fonctions  $f$  définies ci-dessous :

1. Donner une expression explicite du taux d'accroissement de  $f$  en un point  $a$  quelconque du domaine de définition.
2. Calculer la limite en  $a$  de ce taux d'accroissement et retrouver l'expression de la dérivée de  $f$  en  $a$ .

$$f(x) = x^2 ; \quad f(x) = \sqrt{x} ; \quad f(x) = x\sqrt{x}.$$

**Exercice 51.** Règle de l'Hôpital : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle ouvert  $I$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $a \in I$  et que  $g'(a) \neq 0$ . Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

**Exercice 52.** Pour chacune des applications  $f$  définies ci-dessous sur  $\mathbb{R}^*$  :

1. Vérifiez que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
2. L'application prolongée est-elle dérivable en 0?

$$f(x) = x|x| ; \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|} ; \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|} ; \quad f(x) = \cos(\sqrt{|x|}) ;$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} ; \quad f(x) = \sqrt{x} \ln |x| ; \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}.$$

**Exercice 53.** Pour chacune des fonctions  $f$  définies ci-dessous :

1. Préciser le domaine de définition de  $f$ .
2. Soit  $I$  un intervalle ouvert inclus dans  $\mathcal{D}_f$ . Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $I$ .
3. Calculer l'expression de la dérivée de  $f$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} ; \quad f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} ; \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2 \sin^2(x)} ; \quad f(x) = \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)} ; \quad f(x) = \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}.$$

**Exercice 54.** Pour chacune des fonctions  $f$  définies ci-dessous, sur un intervalle  $[a, b]$  :

1. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable à droite en  $a$ ?
3. La fonction  $f$  est-elle dérivable à gauche en  $b$ ?

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)} \text{ sur } [0, 1] ; \quad f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-x)} \text{ sur } [-1, 1] ;$$

$$f(x) = x^{2/3}(1-x)^{3/2} \text{ sur } [0, 1] ; \quad f(x) = \sqrt{x \sin(x)(1 - \sin(x))} \text{ sur } [0, \pi/2].$$

**Exercice 55.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , calculer la dérivée d'ordre  $k$  des fonctions suivantes.

$$x \mapsto \frac{1}{1+x} ; \quad x \mapsto x^2 e^x ; \quad x \mapsto \ln(1-x^2) ;$$

$$x \mapsto e^x \sin(x) ; \quad x \mapsto x^2 \ln(1+x) ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n .$$

**Exercice 56.**

- Déterminer les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que la fonction  $f$  définie ci-dessous soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 0 . \end{cases}$$

- Déterminer les réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que la fonction  $f$  définie ci-dessous soit de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \text{si } x > 0 . \end{cases}$$

**Exercice 57.** On dit qu'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est *paire* si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(-x)$ . On dit qu'elle est *impaire* si  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -f(-x)$ . Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que si  $f$  est paire alors  $f'$  est impaire.
- Montrer que si  $f$  est impaire alors  $f'$  est paire.

**Exercice 58.** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{-1/x^2}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

- Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(k)}(0) = 0$ .
- Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x) = f(x)$  si  $x > 0$  et  $g(x) = 0$  si  $x \leq 0$ . Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 59.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ , dérivable à gauche et à droite en tout point de  $]a, b[$ . On suppose que  $f$  est continue à gauche en  $a$ , à droite en  $b$  et que  $f(a) = f(b)$ . Montrer qu'il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que le produit de la dérivée à gauche en  $c$  par la dérivée à droite en  $c$  soit négatif ou nul.

**Exercice 60.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ , dérivable sur  $]0, +\infty[$ , telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) .$$

Montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 61.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[a, b]$ , dérivables sur  $]a, b[$ . On suppose que  $g'$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$ .

- Montrer que le théorème de Rolle s'applique à la fonction

$$x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) .$$

- En déduire qu'il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que :  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

**Exercice 62.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ , dérivable sur  $]0, +\infty[$ , telle que  $f(0) = 0$ . On suppose que  $f'$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ . Démontrer que la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = f(x)/x$  est croissante.

**Exercice 63.**

1. Etudier les variations de la fonction  $x \mapsto x^5 - 5x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ . En déduire que l'équation  $x^5 - 5x + 1 = 0$  a trois solutions réelles.
2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $n$  un entier naturel. Montrer que l'équation  $x^n + ax + b = 0$  a au plus trois solutions réelles.
3. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation  $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 = 0$  a une seule solution réelle positive.

**Exercice 64.**

1. Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  trois réels. On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Déterminer le point  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

2. Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  trois réels. On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma e^x.$$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Déterminer le point  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Exercice 65.** Utiliser le théorème des accroissements finis pour donner un majorant des réels suivants. Comparer ce majorant avec une approximation numérique à  $10^{-6}$  près.

$$\sqrt{10001} - 100; \quad \frac{1}{0.998} - 1; \quad 0.001 - \frac{1}{1003};$$

$$\sin(3.14); \quad \ln(1.001); \quad e^{0.002} - 1.$$

**Exercice 66.**

1. (a) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Montrer que :  $\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

Démontrer que pour tout  $n$  :  $S_{n+1} - 1 < 2\sqrt{n+1} < S_n$ .

2. (a) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Montrer que :  $\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a}$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Démontrer que pour tout  $n$ ,

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n.$$

### Exercice 67.

1. Démontrer la Règle de L'Hôpital généralisée :

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur  $]a, b[$  dont la limite en  $a$  est nulle, si  $g'$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$  et si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ .

2. En utilisant deux fois cette règle déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

**Exercice 68.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $[a, b]$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$  et pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $f''(x) \leq 0$ . Montrer que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ .

**Exercice 69.** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $f'(x) \geq 0$  et  $f''(x) \geq 0$ .

1. Montrer que si  $f$  est majorée alors  $f$  est constante.
2. Montrer que si  $f$  n'est pas majorée, alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
3. Montrer que la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $f(x)/x$  existe, et qu'elle est soit infinie, soit finie et strictement positive.
4. Soit  $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$ . Montrer que  $f$  vérifie les hypothèses de l'exercice, et calculer la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $f(x)/x$ .

**Exercice 70.** Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle ouvert  $I$ , dérivable en un point  $c \in I$ , et telle que  $f'(c) = 0$ . Montrer que  $c$  est un minimum global pour  $f$  sur  $I$  :  $\forall x \in I, f(c) \leq f(x)$ .

### Exercice 71.

1. Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x_1, \dots, x_n \in I$ ,

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

2. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

3. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ,

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

4. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{-1} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

## 5 Fonctions usuelles

**Vrai-Faux 27.** Soit  $a$  un réel strictement positif,  $x$  et  $y$  deux réels quelconques. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $a^{x-y} = a^x/a^y$ .
2.   $a^{(x^y)} = a^{xy}$ .
3.   $a^{2xy} = a^{x^2} a^{y^2}$ .
4.   $a^{(x+y)/2} = \sqrt{a^x a^y}$ .
5.   $a^{-x+y/2} = \sqrt{a^y/a^x}$ .
6.   $a^{2x-y} = (a^x/a^y)^2$ .

**Vrai-Faux 28.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\ln(\sqrt{a/b}) = (1/2)(\ln(a) - \ln(b))$ .
2.   $\ln((ab)/2) = \sqrt{\ln(a) \ln(b)}$ .
3.   $\ln(a^b) = (\ln(a))^{\ln(b)}$ .
4.   $\ln((a^2)^b) = 2b \ln(a)$ .
5.   $\ln(a^2/b^2) = -2 \ln(ab)$ .
6.   $\ln(a^2/b) = \ln(a) - \ln(b/a)$ .

**Vrai-Faux 29.** Soit  $a$  un réel strictement positif. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\ln(e^{\sqrt{a}}) = a/2$ .
2.   $\ln(a^e) = e \ln(a)$ .
3.   $e^{\ln^2(a)} = a^2$ .
4.   $e^{\ln(a/2)} = a - 2$ .
5.   $\ln(a^{e+a}) = (e + a) \ln(a)$ .
6.   $e^{2\ln(a) - \ln(a)/2} = a^{3/2}$ .

**Vrai-Faux 30.** Soit  $x$  un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\sin(x - 3\pi) = -\sin(x)$ .
2.   $\sin(x + 3\pi) = \sin(x)$ .
3.   $\cos(3\pi - x) = -\cos(x)$ .
4.   $\cos(-x - 3\pi) = -\cos(x)$ .
5.   $\sin(x + 3\pi) = \sin(x)$ .
6.   $\sin(x + 3\pi/2) = -\cos(x)$ .
7.   $\cos(x - 3\pi/2) = \sin(x)$ .
8.   $\cos(x + 3\pi/2) = \sin(x)$ .

**Vrai-Faux 31.** Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\sin(-7\pi/2) = 1.$
2.   $\sin(5\pi/4) = \sqrt{2}/2.$
3.   $\sin(8\pi/3) = -\sqrt{3}/2.$
4.   $\cos(9\pi/2) = 0.$
5.   $\cos(-7\pi/3) = -1/2.$
6.   $\cos(-7\pi/4) = \sqrt{2}/2.$
7.   $\tan(-7\pi/3) = -\sqrt{3}.$
8.   $\tan(-7\pi/4) = 1.$
9.   $\tan(-7\pi/6) = -\sqrt{3}/3.$

**Vrai-Faux 32.** Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \tan(x) = -\infty.$
2.   $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \tan(x) = +\infty.$
3.   $\lim_{x \rightarrow 5\pi/2^+} \tan(x) = -\infty.$
4.   $\lim_{x \rightarrow -5\pi/2^+} \tan(x) = -\infty.$
5.   $\lim_{x \rightarrow 7\pi/2^-} \tan(x) = -\infty.$

**Vrai-Faux 33.** Soit  $x$  un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x).$
2.   $\cos(2x) - \sin(2x) = (\cos(x) + \sin(x))^2 + 2\sin^2(x).$
3.   $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$
4.   $\cos(x) + \cos(3x) = 2\sin(x)\sin(2x).$
5.   $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(x)\cos(2x).$
6.   $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x).$

**Vrai-Faux 34.** Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\arccos(-1/2) = -\pi/3.$
2.   $\arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4.$
3.   $\arcsin(-1/2) = -\pi/6.$
4.   $\arcsin(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3.$
5.   $\arctan(-1) = -\pi/4.$
6.   $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/6.$

**Vrai-Faux 35.** Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x.$
2.   $\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \arcsin(\sin(x)) = x.$
3.   $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$
4.   $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$
5.   $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \arcsin(\cos(x)) = \pi/2 - x.$
6.   $\forall x \in [0, \pi/2], \quad \arccos(\sin(x)) = \pi/2 - x.$
7.   $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \arctan(\sin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$
8.   $\forall x \in [-1, 1], \quad \tan(\arccos(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$
9.   $\forall x \in ]-1, 1[, \quad \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$

**Vrai-Faux 36.** Soit  $x$  un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\sinh(x) < \cosh(x).$
2.   $-1 < \tanh(x) < 1.$
3.   $\cosh(2x) = 2 \cosh(x) - 1.$
4.   $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x).$
5.   $\sinh(x) + \cosh(-x) = e^{-x}.$
6.   $\sinh(2x) + \cosh(2x) = e^{2x}.$
7.   $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}.$
8.   $\cosh(x) + \cosh(3x) = 2 \sinh(x) \sinh(2x).$
9.   $\sinh(x) + \sinh(3x) = 2 \sinh(2x) \cosh(2x).$
10.   $\sinh(3x) - \sinh(x) = 2 \cosh(x) \sinh(2x).$

**Vrai-Faux 37.** Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1.   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argcosh}(\cosh(x)) = x.$
2.   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsinh}(\sinh(x)) = x.$
3.   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argtanh}(\tanh(x)) = x.$
4.   $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \cosh(\operatorname{argcosh}(x)) = x.$
5.   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argcosh}(\sinh(x)) = 1 - x.$
6.   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argtanh}(\sinh(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$
7.   $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \tanh(\operatorname{argcosh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$
8.   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh(\operatorname{argsinh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

**Exercice 72.** Montrer que :

1. Pour tout entier  $n \geq 2$  :  $\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n} < 2\sqrt[n]{n}$ .
2. Pour tout entier  $n \geq 7$  :  $\sqrt[n]{n^{\sqrt{n+1}}} > \sqrt[n]{n+1}^{\sqrt{n}}$ .

**Exercice 73.** Déterminer  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  vérifiant l'équation (E).

1. (E)  $5(3^x) = 3(5^x)$ .
2. (E)  $x^x = \sqrt{2}/2$ .
3. (E)  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$ .

**Exercice 74.** Déterminer le couple  $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ , vérifiant le système d'équations (S).

1. (S) 
$$\begin{cases} 8^x = 10^y \\ 2^x = 5^y \end{cases}$$
2. (S) 
$$\begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases}$$
3. (S) 
$$\begin{cases} xy = 2^2 \\ \ln^2(x) + \ln^2(y) = \frac{5}{2} \ln^2(2) \end{cases}$$

**Exercice 75.**

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \iff a^2 + b^2 = 14ab.$$

2. Soit  $a$  un réel strictement positif, différent de 1. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que :

$$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}.$$

3. Déterminer l'ensemble des triplets de réels  $(a, b, c)$  tels que :

$$\log_{c+b}(a) + \log_{c-b}(a) = 2 \log_{c+b}(a) \log_{c-b}(a).$$

**Exercice 76.** Démontrer les formules de trigonométrie suivantes.

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a);$$

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}; \quad \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2};$$

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a); \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)};$$

$$\text{en notant : } t = \tan(x/2), \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2};$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}; \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)};$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b));$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b));$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right);$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

**Exercice 77.** On pose :

$$F = \{ \arcsin, \arccos, \arctan \} \quad \text{et} \quad G = \{ \sin, \cos, \tan \}.$$

1. Pour tout  $f \in F$  et pour tout  $g \in G$ , donner une expression algébrique pour la composée  $g \circ f$ .
2. Pour tout  $f \in F$  et pour tout  $g \in G$ , déterminer le domaine de définition de la composée  $f \circ g$  et représenter son graphe.

**Exercice 78.** Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel  $x$  tel que les expressions écrites aient un sens.

1.  $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ .
2.  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}$ .
3.  $\sin(2 \arctan(x)) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

**Exercice 79.** Déterminer  $x \in \mathbb{R}$  vérifiant l'équation (E).

1. (E)  $\arccos(x) = \arcsin(1/3) + \arcsin(1/4)$ .
2. (E)  $\arcsin(\tan(x)) = x$ .
3. (E)  $\arcsin(2x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$ .
4. (E)  $\arccos(x) = 2 \arccos(3/4)$ .
5. (E)  $\arccos(x) = \arcsin(1-x)$ .
6. (E)  $\arctan(x) = 2 \arctan(1/2)$ .
7. (E)  $\arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \pi/2$ .
8. (E)  $\arctan(x) + \arctan(2x) = \pi/4$ .

**Exercice 80.** Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b);$$

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b);$$

$$\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a) = 2\cosh^2(a) - 1 = 1 + 2\sinh^2(a);$$

$$\cosh^2(a) = \frac{\cosh(2a) + 1}{2}; \quad \sinh^2(a) = \frac{\cosh(2a) - 1}{2};$$

$$\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a); \quad \tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1 - \tanh^2(a)};$$

$$\text{en notant : } t = \tanh(x/2), \quad \sinh(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \tanh(x) = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}; \quad \tanh(a-b) = \frac{\tanh(a) - \tanh(b)}{1 - \tanh(a)\tanh(b)};$$

$$\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2} \left( \cosh(a+b) - \cosh(a-b) \right);$$

$$\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2} \left( \sinh(a+b) + \sinh(a-b) \right);$$

$$\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right);$$

$$\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

**Exercice 81.** Soit  $n$  un entier. Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel  $x$  tel que les expressions écrites aient un sens.

1.  $\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{\sinh((n + \frac{1}{2})x) + \sinh(x/2)}{2 \sinh(x/2)}.$
2.  $\sum_{k=0}^n \sinh(kx) = \frac{\cosh((n + \frac{1}{2})x) + \cosh(x/2)}{2 \sinh(x/2)}.$
3.  $\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x) + \sin(x/2)}{2 \sin(x/2)}.$
4.  $\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{-\cos((n + \frac{1}{2})x) + \cos(x/2)}{2 \sin(x/2)}.$

**Exercice 82.** On pose :

$$F = \{ \operatorname{argsinh}, \operatorname{argcosh}, \operatorname{argtanh} \} \quad \text{et} \quad G = \{ \sinh, \cosh, \tanh \}.$$

1. Pour tout  $f \in F$  et pour tout  $g \in G$ , donner une expression algébrique pour la composée  $g \circ f$ .
2. Pour tout  $f \in F$  et pour tout  $g \in G$ , déterminer le domaine de définition de la composée  $f \circ g$  et représenter son graphe.

**Exercice 83.** Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel  $x$  tel que les expressions écrites aient un sens.

1.  $\operatorname{argtanh}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \ln(x).$
2.  $\operatorname{argsinh}(3x + 4x^3) = 3 \operatorname{argsinh}(x).$
3.  $\cosh(2 \operatorname{argtanh}(x)) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$
4.  $\sinh\left(\frac{1}{2} \operatorname{argcosh}(x)\right) = \sqrt{\frac{x - 1}{2}}.$
5.  $\operatorname{argcosh}\left(\sqrt{\frac{1 + \cosh(x)}{2}}\right) = \frac{x}{2}.$
6.  $2 \operatorname{argtanh}(\tan(x)) = \operatorname{argtanh}(\sin(2x)).$

**Exercice 84.** Déterminer  $x \in \mathbb{R}$  vérifiant l'équation  $(E)$ .

1.  $(E) \quad \operatorname{argsinh}(x) = \operatorname{argsinh}(2 - x).$
2.  $(E) \quad \operatorname{argcosh}(4x^3 - 3x) - \operatorname{argcosh}(2x^2 - 1) = 1.$

## 6 Développements limités

**Vrai-Faux 38.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que

$$f(x) = x + x^2 + o(x^4).$$

On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi?) :

1.  La fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0.
2.  La fonction  $f$  est continue en 0.
3.  La dérivée de  $f$  en 0 est égale à 1.
4.  Si  $f$  est 2 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors  $f^{(2)}(0) = 1$ .
5.  Si  $f$  est 3 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors  $f^{(3)}(0) = 0$ .
6.  La fonction  $x \mapsto f(x)/x$  admet un développement limité d'ordre 3 en 0.
7.  La fonction  $x \mapsto x^2 f(x)$  admet un développement limité d'ordre 5 en 0.
8.   $f^2(x) = x^2 + x^4 + o(x^6)$ .
9.   $f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^6)$ .
10.   $f(2x) = 2x + 2x^2 + o(x^4)$ .
11.   $f(x^4) = o(x^4)$ .
12.   $f(2x^2) \sim 2x^2$ .

**Vrai-Faux 39.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions, admettant un développement limité d'ordre 2 en 0.

On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi?) :

1.  La fonction  $f + g$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
2.  La fonction  $fg$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
3.  La fonction  $f/g$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
4.  La fonction  $x \mapsto x^2 f(x)g(x)$  admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
5.  La fonction  $x \mapsto x^2 f(x) + g(x)$  admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
6.  La fonction  $x \mapsto f^2(x)g^2(x)$  admet un développement limité d'ordre 4 en 0.

**Vrai-Faux 40.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = x + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) = -x + x^3 + o(x^3).$$

On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi?) :

1.   $f(x) + g(x) = o(x^2)$ .
2.   $f(x) - g(x) = o(x)$ .
3.   $f(x) + 2g(x) = o(f(x))$ .
4.   $2f(x) + g(x) \sim f(x)$ .
5.   $f(x)g(x) = -x^2 + x^6 + o(x^6)$ .
6.   $f^2(x) - g^2(x) \sim 4x^4$ .
7.   $f^2(x)g(x) \sim x^3$ .
8.   $f(x)g^2(x) \sim x^3$ .

**Vrai-Faux 41.** Soit  $n$  un entier quelconque. On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \sin(x)/x$ , prolongée par continuité en 0. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.  Pour tout  $n$ ,  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0.
2.  Pour tout  $n$ , le développement limité d'ordre  $n$  de  $f$  ne contient que des termes impairs.
3.  Pour tout  $n$ ,  $x \mapsto f(x)/x$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0.
4.   $f(x^2) - 1 = O(x^4)$ .
5.   $(f(x) - 1)^2 = O(x^4)$ .
6.   $f(x) - \cos(x) = O(x^4)$ .
7.   $f(x) - \cos(x/\sqrt{3}) = O(x^4)$ .

**Vrai-Faux 42.** Soient  $n$  un entier et  $f$  une fonction indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Les propositions portent sur des développements limités d'ordre  $n$  en 0. On suppose que  $f$  est *paire*. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi) :

1.  Le développement de  $1/f$  ne contient que des termes impairs.
2.  Le développement de  $x \mapsto f(x^3)$  ne contient que des termes impairs.
3.  Le développement de  $x \mapsto f(\sin(x))$  ne contient que des termes pairs.
4.  Le développement de  $x \mapsto \sin(x)f(x)$  ne contient que des termes impairs.
5.  Le développement de  $x \mapsto xf(x)/|x|$  ne contient que des termes impairs.
6.  Le développement de  $f''$  ne contient que des termes pairs.
7.  Si  $F$  est une primitive quelconque de  $f$ , le développement de  $F$  ne contient que des termes impairs.

**Vrai-Faux 43.** Soit  $n$  un entier. Les propositions suivantes portent sur des développements limités d'ordre  $n$  en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + \dots + 2^n x^n + o(x^n)$ .
2.   $\frac{1}{2-x} = 1 + (1-x) + \dots + (1-x)^n + o(x^n)$ .
3.   $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$ .
4.   $\frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2} - \frac{3x}{4} + \dots + \frac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$ .
5.   $\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x - 2x^2 + \dots + \frac{(-1)^n 2x^n}{2^n + 1} + o(x^n)$ .
6.   $\frac{1-x}{1+x} = 1 + 2x - 2x^2 + \dots + \frac{(-1)^n 2x^n}{2^n + 1} + o(x^n)$ .
7.   $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots + (-1)^n (n+1)x^n + o(x^n)$ .
8.   $\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + 3nx^n + o(x^n)$ .

**Vrai-Faux 44.** Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $e^{x-1} = x + o(x)$ .
2.   $e^{x-1} = 1/e + o(1)$ .
3.   $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$ .
4.   $e^{x^2-1} = e + ex^2 + o(x^2)$ .
5.   $e^{(x-1)^2} = e - 2ex + 3ex^2 + o(x^2)$ .
6.   $(e^x - 1)^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ .
7.   $(e^x)^2 - 1 = o(x)$ .
8.   $(e^x)^2 - 1 - 2x = 2x^2 + o(x^2)$ .

**Vrai-Faux 45.** Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $\sin(2x) = 2x - x^3/3 + o(x^3)$ .
2.   $\sin(\pi/2 - x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ .
3.   $\sin(\tan(x)) = x + o(x^2)$ .
4.   $\sin(\sin(x)) = x - x^3/6 + o(x^3)$ .
5.   $\cos(\sin(x)) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ .
6.   $\sin(\cos(x)) = o(x)$ .
7.   $\tan(\sin(x)) = x + x^3/3 + o(x^3)$ .
8.   $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x)) = o(x^6)$ .

**Vrai-Faux 46.** Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $\sqrt{2+x} = 1 + (1+x)/2 + o(1+x)$ .
2.   $\sqrt{4+x} = 2 + x/2 + o(x)$ .
3.   $1/\sqrt{4+x} = 1/2 - x/16 + o(x)$ .
4.   $\sqrt[3]{3+x} = 1 + x/3 + o(x)$ .
5.   $1/\sqrt[3]{1-3x} = 1 + x + o(x)$ .
6.   $\sqrt[3]{1+3x^3} = 1 + x^3 + o(x^5)$ .
7.   $(8+3x)^{2/3} = 4 + x + o(x)$ .
8.   $(8+3x)^{-2/3} = 1/4 + x + o(x)$ .

**Vrai-Faux 47.** Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $\ln(1-x) = -x + x^2/2 + o(x^2)$ .
2.   $\ln(1-x^2) = -x^2 - x^4/2 - x^6/3 + o(x^6)$ .
3.   $\ln(1+e^x) = 1 + x + o(x)$ .
4.   $\ln(\cos(x)) = -x^2/2 + o(x^3)$ .
5.   $\ln(1+\cos(x)) = \ln(2) - x^2/4 + o(x^3)$ .
6.   $\ln(1+\sin(x)) = x + o(x^2)$ .
7.   $\ln(1+\sin(x)) - \ln(1+\tan(x)) = o(x^2)$ .
8.   $\ln(1+x^2) - \ln((1+x)^2) = o(x)$ .

**Vrai-Faux 48.** Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de  $+\infty$ . Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ .
2.   $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .
3.   $\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ .
4.   $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ .
5.   $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln(x) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .
6.   $x^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .
7.   $e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^{314}}\right)$ .

**Vrai-Faux 49.** Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de  $0^+$ . Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1.   $\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x} + x/2 + o(x)$ .
2.   $\sqrt{x+\sqrt{x}} = x^{1/4} + x^{3/4}/2 + o(x^{3/4})$ .
3.   $\cos(x^{2/5}) = 1 + o(x)$ .
4.   $\sin(\sqrt[3]{x^3+x^5}) = x + o(x^2)$ .
5.   $\frac{\ln(x)}{\sin(x)} = \frac{\ln(x)}{x} + o(x \ln(x))$ .
6.   $\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(x)} = \frac{\ln(x)}{2x} + o(x \ln(x))$ .
7.   $\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})} = \frac{\ln(x)}{2x} + o(x \ln(x))$ .
8.   $\frac{\ln(\sqrt{1+x})}{\sin(\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} + o(\sqrt{x})$ .

**Exercice 85.** Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes.

$$f : x \mapsto \sin(x), \quad f : x \mapsto \cos(x), \quad f : x \mapsto e^x,$$

$$f : x \mapsto \ln(1+x), \quad f : x \mapsto \arctan(x), \quad f : x \mapsto \arcsin(x),$$

1. Calculer les dérivées de  $f$  jusqu'à l'ordre  $n = 5$ . Écrire le polynôme de Taylor  $P_5$  en 0.
2. Pour  $x = 0.1$  puis  $x = 0.01$ , donner une valeur numérique approchée de  $f(x) - P_5(x)$ .
3. Écrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de  $x \mapsto f(2x)$ .
4. Écrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de  $x \mapsto f(x/3)$ .
5. Écrire le développement limité d'ordre 10 en 0 de  $x \mapsto f(x^2)$ .
6. Écrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de  $x \mapsto f(x+x^2)$ .

**Exercice 86.** Démontrer les résultats suivants.

1.  $\cos(x) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ .
2.  $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$ .
3.  $\frac{1}{1 - \sin(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ .
4.  $\frac{1}{1 - \arctan(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ .
5.  $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$ .
6.  $\ln(1 + x^2 \sin(x)) = x^3 - \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$ .
7.  $\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$ .
8.  $\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2) = -2x^2 - x^3 + 7x^4 + o(x^4)$ .
9.  $\cosh(1 - \cos(x)) = 1 + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ .
10.  $\cos(1 - \cosh(x)) = 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ .
11.  $\sin(x - \arctan(x)) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + o(x^8)$ .
12.  $\sin(x - \arctan(x)) - x + \arctan(x) = o(x^8)$ .
13.  $\cosh(1 - \cos(x)) + \cos(\cosh(x) - 1) = 2 - \frac{x^6}{24} + o(x^6)$ .
14.  $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x)) = \frac{x^5}{3} + o(x^8)$ .
15.  $\arcsin(\ln(1 + x^2)) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ .
16.  $\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$ .
17.  $\ln(2\cos(x) + \sin(x)) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + \frac{5x^3}{24} + o(x^3)$ .
18.  $\arctan(e^x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$ .

**Exercice 87.** Soit  $n$  un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre  $2n$  en 0 de la fonction  $x \mapsto 1/(1-x^2)$ .

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n}).$$

1. Écrire le développement d'ordre  $n$  de  $x \mapsto 1/(1-x)$ , puis composer avec  $x \mapsto x^2$ .
2. Écrire les développements d'ordre  $2n$  de  $x \mapsto 1/(1-x)$  et  $1/(1+x)$ , puis calculer la demi-somme.
3. Écrire les développements d'ordre  $2n$  de  $x \mapsto 1/(1-x)$  et  $1/(1+x)$ , puis calculer le produit.

**Exercice 88.** Soit  $n$  un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre  $n$  en 0 de la fonction  $x \mapsto (1-x)^{-2}$ .

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n).$$

1. Écrire le développement d'ordre  $n$  de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  pour  $\alpha = -2$ , puis composer avec  $x \mapsto -x$ .
2. Écrire le développement d'ordre  $n+1$  de  $x \mapsto 1/(1-x)$ , puis dériver.
3. Écrire le développement d'ordre  $n$  de  $x \mapsto 1/(1-x)$ , puis élever au carré.
4. Écrire le développement d'ordre  $n$  de  $x \mapsto 1/(1-x)$ , puis composer avec  $x \mapsto 2x - x^2$ .

**Exercice 89.** Soit  $n$  un entier. Démontrer les résultats suivants (utiliser une décomposition en éléments simples si nécessaire).

1.  $\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}} + o(x^{2n})$ .
2.  $\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{16} + \frac{x}{32} + \frac{3x^2}{4^4} + \cdots + \frac{(n+1)x^n}{4^{n+2}} + o(x^n)$ .
3.  $\frac{x^2}{x-4} = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{16} - \cdots - \frac{x^n}{4^{n-1}} - \cdots + o(x^n)$ .
4.  $\frac{x^2}{x^2-4} = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} - \cdots - \frac{x^{2n}}{4^n} - \cdots + o(x^{2n})$ .
5.  $\frac{x^2}{x^2+4} = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{4^n} + \cdots + o(x^{2n})$ .
6.  $\frac{x}{(1-2x)(1-4x)} = 1 + 6x + 28x^2 + \cdots + 2^n(2^{n+1}-1)x^n + o(x^n)$ .
7.  $\frac{x}{2x^2-3x+1} = x + 3x^2 + \cdots + (-1+2^n)x^n + \cdots + o(x^n)$ .

**Exercice 90.**

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :

$$x \mapsto \sin^2(x), \quad x \mapsto \cos^2(x), \quad x \mapsto \sin(x) \cos(x).$$

3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin(x) \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

**Exercice 91.**

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :

$$x \mapsto \sinh^2(x), \quad x \mapsto \cosh^2(x), \quad x \mapsto \sinh(x) \cosh(x).$$

3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}, \quad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2},$$

$$\sinh(x) \cosh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2}.$$

**Exercice 92.** Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction arc sinus.

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) .$$

On notera  $a, b, c$  les trois réels (supposés inconnus) tels que  $\arcsin(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$ .

1. Écrire le développement limité d'ordre 4 de  $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ . En déduire les valeurs de  $a, b, c$ .
2. Écrire les développements limités d'ordre 4 de  $\sin$  puis de  $\sin \circ \arcsin$ . Retrouver les valeurs de  $a, b, c$ .
3. Écrire les développements limités d'ordre 5 de  $\cos$ , puis de  $\cos \circ \arcsin$ , puis de  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ . En utilisant la formule  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ , retrouver les valeurs de  $a, b, c$ .
4. Écrire, en fonction de  $a, b, c$ , les développements limités d'ordre 6 de la primitive de  $\arcsin$  nulle en 0, ainsi que de la fonction  $x \mapsto x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$ . En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de  $a, b, c$ .

**Exercice 93.** Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction argument sinus hyperbolique.

$$\operatorname{argsinh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) .$$

On notera  $a, b, c$  les trois réels (supposés inconnus) tels que  $\operatorname{argsinh}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$ .

1. On rappelle la formule  $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ . Calculer le développement limité d'ordre 5 de la fonction  $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ . Calculer les valeurs de  $a, b, c$ .
2. On rappelle que la dérivée de  $\operatorname{argsinh}$  est la fonction  $x \mapsto (1+x^2)^{-1/2}$ . Calculer le développement limité d'ordre 4 de cette fonction. Retrouver les valeurs de  $a, b, c$ .
3. Écrire les développements limités d'ordre 4 de  $\sinh$  puis de  $\sinh \circ \operatorname{argsinh}$ . Retrouver les valeurs de  $a, b, c$ .
4. Écrire les développements limités d'ordre 5 de  $\cosh$ , puis de  $\cosh \circ \operatorname{argsinh}$ . En utilisant la formule  $\cosh(\operatorname{argsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ , retrouver les valeurs de  $a, b, c$ .
5. Écrire, en fonction de  $a, b, c$ , les développements limités d'ordre 6 de la primitive de  $\operatorname{argsinh}$  nulle en 0, ainsi que de la fonction  $x \mapsto x \operatorname{argsinh}(x) - \sqrt{1+x^2} + 1$ . En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de  $a, b, c$ .

**Exercice 94.** Soit  $n$  un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par deux méthodes différentes, le développement limité d'ordre  $n$  en 0 de la fonction argument tangente hyperbolique.

$$\operatorname{argtanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) .$$

1. On rappelle que  $\operatorname{argtanh}(x)$  est la primitive, nulle en 0, de la fonction  $x \mapsto 1/(1-x^2)$ . Écrire le développement limité d'ordre  $n$  de  $\operatorname{argtanh}'$ , et en déduire celui de  $\operatorname{argtanh}$ .
2. On rappelle la formule :

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2} \left( \ln(1+x) - \ln(1-x) \right) .$$

Écrire les développements limités d'ordre  $n$  de  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto \ln(1-x)$ , en déduire celui de  $\operatorname{argtanh}$ .

**Exercice 95.**

1. Écrire les développements limités d'ordre 5 en 0, des fonctions  $\sin$ ,  $\arcsin$ ,  $\sinh$ ,  $\operatorname{argsinh}$ ,  $\tan$ ,  $\arctan$ ,  $\tanh$ ,  $\operatorname{argtanh}$ .
2. En déduire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  :

$$\begin{aligned} \tanh(x) &\leq \arctan(x) \leq \sin(x) \leq \operatorname{argsinh}(x) \leq x \\ &\leq \sinh(x) \leq \arcsin(x) \leq \tan(x) \leq \operatorname{argtanh}(x) . \end{aligned}$$

**Exercice 96.** Démontrer les résultats suivants.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \frac{1}{6}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan(x) - x^2}{\cos(x^2) - 1} = \frac{2}{3}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)} = -1$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)} = 2$ .

**Exercice 97.** Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes.

$$f : x \mapsto \sin(x), \quad f : x \mapsto \cos(x), \quad f : x \mapsto e^x, \quad f : x \mapsto \ln(1+x),$$

$$f : x \mapsto \arctan(x), \quad f : x \mapsto \arcsin(x), \quad f : x \mapsto 1/(1-x), \quad f : x \mapsto \sqrt{1+x}.$$

1. Écrire le développement limité d'ordre 5 de  $f$  en 0. Ce développement sera utilisé pour toutes les questions suivantes.
2. Écrire un développement asymptotique au voisinage de  $0^+$  pour  $f(\sqrt{x})$ .
3. Écrire un développement asymptotique au voisinage de  $+\infty$  pour  $f(1/x)$ .

**Exercice 98.** Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de  $0^+$ .

1.  $\frac{1}{\ln^2(1+x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{12} + o(x)$ .
2.  $\frac{1}{\sin^3(x^2)} = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2x^2} + o(x)$ .
3.  $\sqrt{x+2x^3} = x^{1/2} + x^{5/2} - \frac{x^{7/2}}{2} o(x^{7/2})$ .
4.  $\frac{\sqrt{x+x^3}}{\sqrt[3]{x+x^2}} = x^{1/6} - \frac{x^{7/6}}{3} + \frac{13x^{13/6}}{18} + o(x^{13/6})$ .
5.  $x^x = 1 + x \ln(x) + \frac{x^2 \ln^2(x)}{2} + o(x^2 \ln(x))$ .

**Exercice 99.** Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de  $+\infty$ .

1.  $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ .
2.  $\frac{1+x^2}{(1+x)(2-x)} = -1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ .
3.  $\frac{1}{x \sin(1/x)} = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{7}{360x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ .
4.  $\frac{1}{x \arctan(1/x)} = 1 + \frac{1}{3x^2} - \frac{4}{45x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ .
5.  $\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} = x^{5/6} - \frac{1}{3x^{7/6}} + \frac{1}{2x^{13/6}} + o\left(\frac{1}{x^{13/6}}\right)$ .
6.  $\frac{\sqrt{e^{-x}+e^{-3x}}}{\sqrt[3]{e^{-x}+e^{-2x}}} = e^{-x/6} - \frac{e^{-7x/6}}{3} + \frac{13e^{-13x/6}}{18} + o\left(e^{-13x/6}\right)$ .

**Exercice 100.** Démontrer les résultats suivants.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(\sqrt{x^2+x}) - \sinh(\sqrt{x^2-x}) = +\infty$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(\cosh(x)) - \cosh(\sinh(x)) = +\infty$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cosh(\sqrt{x+1}) - \cosh(\sqrt{x}) \right)^{1/x} = e$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{e^x - x^2} - (e^x + x^2)^{e^x - x} = -\infty$ .

**Exercice 101.** Pour chacune des applications  $f$  suivantes, déterminer les asymptotes de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  ainsi que la position de la courbe représentative par rapport à ces asymptotes.

1.  $f : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$ .
2.  $f : x \mapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$ .
3.  $f : x \mapsto (x+1) \arctan(x)$ .
4.  $f : x \mapsto (x+1)e^{1/(x+1)}$ .
5.  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$ .
6.  $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ .
7.  $f : x \mapsto x \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ .
8.  $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3-2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}$ .