Unité d'Enseignement MAT123

Analyse

Table des matières

7 janvier 2016

1 Nombres réels

1.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ A possède une borne supérieure, finie ou infinie.
2. $\boxtimes$ Si A est minorée, alors A possède une borne inférieure finie.
3. $\square$ Si $x \leqslant \sup(A)$ alors $x \in A$.
4. $\square$ Si A contient au moins 2 réels distincts, alors A contient un rationnel.
5. $\square$ Si A est infinie, alors A contient une infinité d'irrationnels.
6. $\boxtimes$ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant lui-même deux points distincts, alors A contient une infinité d'irrationnels.
7. $\square$ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, alors A contient une infinité de rationnels.

Vrai-Faux 2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $|A| = \{|x|\,,\ x \in A\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\square$ Si A est majorée, alors $|A|$ possède une borne supérieure finie.
2. $\boxtimes$ 0 est un minorant de $|A|$.
3. $\boxtimes$ $|A|$ possède toujours une borne inférieure finie.
4. $\square$ $|A|$ possède toujours une borne supérieure finie.
5. $\boxtimes$ A est bornée si et seulement si $|A|$ est majorée.
6. $\boxtimes$ Si A est un intervalle, alors $|A|$ est un intervalle.
7. $\square$ Si $|A|$ est un intervalle, alors A est un intervalle.
8. $\square$ Si A est un intervalle ouvert, alors $|A|$ est un intervalle ouvert.
9. $\boxtimes$ Si A est un intervalle fermé, alors $|A|$ est un intervalle fermé.

Vrai-Faux 3. Soit a un réel quelconque. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\square$ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a < \varepsilon)$, alors $a < 0$.
2. $\boxtimes$ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $a \geqslant 1$.
3. $\boxtimes$ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - 2\varepsilon)$.
4. $\square$ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $(\forall \varepsilon \geqslant 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$.
5. $\boxtimes$ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1/\sqrt{n})$, alors $a > 1$.
6. $\square$ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a < 1/\sqrt{n})$, alors $a < 0$.
7. $\boxtimes$ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1 - 1/\sqrt{n})$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$.

Vrai-Faux 4. Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\square$ Si $a+b$ est rationnel, alors soit a est rationnel soit b est rationnel.
2. $\boxtimes$ Si $a+b$ est irrationnel, alors soit a est irrationnel soit b est irrationnel.
3. $\boxtimes$ Si a est rationnel, alors sa partie décimale est rationnelle.
4. $\square$ Si a est irrationnel, alors la partie décimale de $a+b$ est irrationnelle.
5. $\boxtimes$ Si la partie décimale de a est rationnelle, alors a est rationnel.

Vrai-Faux 5. Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ $|ab| = |a|\,|b|$.
2. $\boxtimes$ $|a| - |b| \leqslant |a-b|$.
3. $\square$ $|a-b| \leqslant \max\{|a|, |b|\}$.
4. $\boxtimes$ $|a-b| = |a-(a+b)/2| + |(a+b)/2 - b|$.
5. $\square$ $|a-b| = |a-(a+b)| + |(a+b)-b|$.
6. $\square$ Si $|a-b| < |a|$, alors $|ab| = ab$.
7. $\square$ $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
8. $\boxtimes$ $\lfloor a+b \rfloor \geqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
9. $\boxtimes$ $\lfloor a+b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
10. $\square$ $D(a+b) = D(a) + D(b)$.

1.2 Exercices

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \geq 1$,

$$\frac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{1-x}{2}.$$

Exercice 2.

1. À quel intervalle appartient x^2 si $x \in]-6, 1]$?
2. Quel est l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $1/x < -2$?

Exercice 3. On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \{\frac{x-y}{x+y+3};\ x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}.$$

Trouver un majorant et un minorant de A.

Exercice 4. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Dessiner les sous-ensembles suivants :

1. $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| > 3\}$

2. $I' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-5| < 1\}$
3. $I'' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x+5| < 2\}$
4. $I_{a,\epsilon} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \epsilon\}$
5. $K_{a,\epsilon} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| > \epsilon\}$

Exercice 5. Définir à l'aide d'une valeur absolue les encadrements suivants :

$$x \in [-2,2], \quad x \in [-3,5], \quad x \in [-1,6].$$

Exercice 6. Démontrer que pour tous réels a et b donnés, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|b-a|}{2}, \quad \min(a,b) = \frac{a+b-|b-a|}{2}.$$

Exercice 7. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad]0,1[\cap\mathbb{Q}, \ \ \mathbb{N}, \quad \{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 8. Pour chacun des ensembles de réels suivants :

$$\{(-1)^n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ \{(-1)^n/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}\ ,\ \{(-1)^n n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

$$\left\{\frac{n+1}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+1}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+(-1)^n}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,$$

$$\left\{\frac{m+n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{2m+n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{m-n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ .$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 9. On considère les ensembles de réels suivants :

$$\{x \in \mathbb{R}\,,\ |x| > 1\}\ ,\ \left\{x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 \leqslant 1\right\}\ ,\ \left\{x \in \mathbb{R}\,,\ x^3 < 1\right\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^*\,,\ 1/x \leqslant 1\}\ ,\ \{x \in \mathbb{R}^*\,,\ 1/x > 1\}\ ,\ \left\{x \in \mathbb{R}^*\,,\ 1/x^2 < 1\right\}$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leqslant 0\right\}\ ,\ \left\{x \in \mathbb{R}^{+*}, \sin\frac{1}{x} \leqslant 0\right\}\ ,\ \left\{x \in \mathbb{R}^{+*}, |\sin\frac{1}{x}| < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\ .$$

1. Ecrire l'ensemble comme un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
2. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
3. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

4. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 10. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \subset B$ implique $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ et $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\} \ .$$
3. Montrer que si l'intersection $A \cap B$ est non vide, alors elle admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que
$$\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cap B) \geqslant \max\{\inf(A), \inf(B)\} \ .$$
4. On note $A + B = \{a + b\,,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \ .$$
5. On note $AB = \{ab\,,\ a \in A\,,\ b \in B\}$. Montrer que AB admet une borne supérieure et une borne inférieure. Montrer que, si A et B sont inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors
$$\sup(AB) = \sup(A)\,\sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(AB) = \inf(A)\,\inf(B) \ .$$

Exercice 11. Soient A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cap B$ est un intervalle.
2. Montrer que si $A \cap B$ est non vide, alors $A \cup B$ est un intervalle.
3. Montrer par un exemple que $A \cup B$ peut être un intervalle même si $A \cap B$ est vide.
4. On note $A + B = \{a + b\,,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est un intervalle.
5. On note $AB = \{ab\,,\ a \in A\,,\ b \in B\}$. Montrer que AB est un intervalle.

Exercice 12. Soient x et y deux rationnels distincts tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

1. On considère les deux réels $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. Montrer que leur produit est rationnel, leur somme irrationnelle. En déduire qu'ils sont irrationnels.
2. Soient r et s deux rationnels. Montrer que $r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$ est irrationnel.
3. Montrer par des exemples que $\sqrt{x}\sqrt{y}$ peut être rationnel ou irrationnel.
4. Montrer que les réels suivants sont irrationnels.
$$1 + \sqrt{2}\,,\ \sqrt{2} + \sqrt{3}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2\,,$$
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\,,\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2\ .$$

Exercice 13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant deux points distincts. Montrer que I contient :

1. une infinité de rationnels,
2. une infinité d'irrationnels,
3. une infinité de nombres décimaux,
4. une infinité de nombres multiples entiers d'une certaine puissance négative de 2 (nombres dyadiques).

2 Suites numériques

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 6. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si x est rationnel, la suite des décimales de x est périodique.
2. ☒ Si x est décimal, la suite des décimales de x est constante à partir d'un certain rang.
3. ☒ Toute suite récurrente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, est périodique à partir d'un certain rang.
4. ☐ Si F est une application croissante, la suite $(F^{\circ n}(u_0))$ est croissante.
5. ☒ Si f est une application croissante, la suite $(f(n))$ est croissante.
6. ☒ Si P est une application polynôme, la suite $(P(n))$ est monotone à partir d'un certain rang.
7. ☐ La suite $(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4})$ est périodique de période 4.
8. ☒ La suite $((-1)^k)$ est une suite extraite de la suite $(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4})$.
9. ☒ On peut extraire de la suite $(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4})$ une sous-suite constante.

Vrai-Faux 7. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Toute suite croissante et minorée tend vers $+\infty$.
2. ☒ Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
3. ☒ Toute suite croissante et bornée converge.
4. ☐ Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. ☒ Si la suite des décimales de x converge, alors x est un nombre rationnel.
6. ☐ Si $r \leqslant 1$ alors $(\cos(n)\, r^n)$ tend vers 0.
7. ☒ Si $r < 1$ alors $(\cos(n)\, r^n)$ tend vers 0.

Vrai-Faux 8. Soit (u_n) une suite de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si (u_n) tend vers 0, alors pour tout n, $u_n < 1$.
2. ☒ Si (u_n) tend vers 0, alors $u_n < 1$ pour n assez grand.
3. ☒ Si (u_n) tend vers 2, alors $u_n > 1$ pour n assez grand.
4. ☒ Si (u_n) tend vers 0 alors $(\cos(n)\, u_n)$ tend vers 0.
5. ☐ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\, u_n)$ tend vers 1.

6. ☒ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\, u_n)$ est bornée.
7. ☐ Si la suite $(|u_n|)$ converge vers l, alors la suite (u_n) converge vers l ou vers $-l$.
8. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
9. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n^2}) converge vers l.
10. ☒ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^2) converge vers 1.
11. ☐ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^n) converge vers 1.

Vrai-Faux 9. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si pour tout n, $(u_n) \geqslant \sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. ☐ Si pour tout n, $(u_n) \geqslant -\sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.
3. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) tendent vers 1, alors (v_n) tend vers 1.
4. ☐ Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) converge.
5. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) est bornée.
6. ☒ Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
7. ☐ Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
8. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors (u_n/v_n) est bornée.
9. ☐ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.
10. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$.

Vrai-Faux 10. Soit (u_n) une suite de réels croissante et non majorée. Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi) :

1. ☒ La suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang.
2. ☐ La suite (u_n^2) est croissante.
3. ☒ La suite $(\sqrt{|u_n|})$ tend vers $+\infty$.
4. ☒ La suite $(\exp(-u_n))$ tend vers 0.
5. ☐ La suite $(1/u_n)$ est décroissante.

Vrai-Faux 11. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $n2^n = O(2^n)$.
2. ☒ $2^{n+1} = O(2^n)$.
3. ☐ $2^{n^2+n} = O(2^{n^2})$.
4. ☒ $n2^n = o(3^n)$.

5. ☐ $n2^n/\sqrt{n+1} = O(2^n)$.
6. ☒ $n2^n/\sqrt{n^2+1} \sim 2^n$.
7. ☐ $3^n/n = O(2^n)$.
8. ☒ $2^n/n = o(2^n)$.
9. ☐ $n2^{-n} = O(2^{-n})$.
10. ☒ $n3^{-n} = o(2^{-n})$.
11. ☐ $n2^{-n}/\sqrt{n+1} = O(2^{-n})$.
12. ☒ $n2^{-n}/\sqrt{n^2+1} \sim 2^{-n}$.
13. ☒ $3^{-n}/n = O(2^{-n})$.
14. ☒ $2^{-n}/n = o(2^{-n})$.

2.2 Exercices

Exercice 14. On considère les suites (u_n) définies par :

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\ , \quad u_n = \frac{2n+3}{2n+1}\ , \quad u_n = \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\ ,$$

$$u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1}\ , \quad u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1}\ , \quad u_n = \frac{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+n+1}\ .$$

Pour chacune de ces suites :

1. Montrer qu'elle converge vers 1.
2. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer en fonction de ε le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Exercice 15. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit :

1. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}\ .$$
2. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}\ .$$
3. $$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}\ .$$
4. $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\ , \quad u_n = s_{2n+1} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n}\ .$$

5.

$$u_0 = a > 0 \ , \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \ , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ .$$

6.

$$u_0 = a > 0 \ , \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ , \quad v_{n+1} = \frac{2}{1/u_n + 1/v_n} \ .$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 16. Soit (u_n) une suite de réels.

1. Montrer que si les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.
3. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent, alors (u_n) converge.
4. Montrer par un exemple que les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) et (u_{n^2}) peuvent converger sans que (u_n) converge.

Exercice 17. Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{\ln n}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}}) \ , \quad \frac{n^2 \ln n}{2^n} = o(\frac{1}{n^4}) \ , \quad \frac{10^n}{n!} = o((3/2)^{-n}) \ .$$

2. Suites tendant vers $+\infty$:

$$10^n = o(\frac{\sqrt{n!}}{(4/3)^n}) \ , \quad n^4\, 2^{n^2} = o((6/5)^{n^3}) \ , \quad (\ln n)^4 \sqrt{n} = o(n^2 \ln(\ln n)) \ .$$

Exercice 18. Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{\ln(n^2+n)}{n} = O(\frac{\ln(n)}{n}) \ , \quad \frac{n^2 + \ln(n^2)}{(2n+1)^3} = O(\frac{1}{n}) \ , \quad \frac{3}{2^{2n+1} + n^4} = O(4^{-n}) \ .$$

2. Suites tendant vers $+\infty$:

$$\frac{2n + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n+3}} = O(n^{2/3}) \ , \quad \ln(n^2 + 2n + 3) = O(\ln(n)) \ , \quad \frac{4n^2 + 3n\cos(n)}{5n - \sin(n+3)} = O(n) \ .$$

Exercice 19. Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{4n^3 - \sqrt{n^5 + 3n^4}}{(\sqrt{2}n + \sqrt{n})^4} \sim \frac{1}{n} \ , \quad \frac{\ln(2^{n+\sqrt{n}})}{\ln(2^{n\sqrt{n}})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \ , \quad \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n\cos(n)}}{\sqrt{n^3 + n^2\sin(n)}} \sim n^{-5/6} \ .$$

2. Suites tendant vers $+\infty$:

$$\frac{2n + \ln(n^3)}{\sqrt{4n+5}} \sim \sqrt{n} \ , \quad \frac{\ln(2^{n^2+3n})}{\ln(2^{n\sqrt{n}}} \sim \sqrt{n} \ , \quad \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n\cos(n)}}{\sqrt{n + \sin(n)}} \sim \sqrt[6]{n} \ .$$

Exercice 20. Démontrer les résultats suivants.

1.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\mathrm{e}} \ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^{1/2}}\right)^n = +\infty \ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 \ .$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^6 + 2^{3n}} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1} + (-1)^n}{n^{-3} + (-1)^{3n}} = 1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1/2} + (-1/2)^n}{n^{-3} + (-1/2)^{3n}} = +\infty \ .$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = 1 \ .$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3-n^2} = +\infty \ , \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = 1 \ .$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n + \sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2-1}} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n - \sqrt{n^2-1}} = -1 \ .$$

Exercice 21. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$, si pour tous réels a, b tels que $a < b$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité d'éléments de A.
2. Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$, et x un réel quelconque. Montrer que x est la limite d'une suite d'éléments de A. Indication : considérer les intervalles $]x - 1/n, x + 1/n[$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que tout réel soit limite d'une suite d'éléments de A. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$c_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$$

la moyenne arithmétique des n premiers termes. La suite (c_n) est appelée « suite des moyennes de Cesaro » de (u_n).

1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (c_n) converge aussi vers 0.
2. En déduire que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (c_n) converge aussi vers l.
3. Pour $u_n = (-1)^n$, montrer que (c_n) tend vers 0.
4. Soit (u_n) une suite de réels telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers l. Montrer que la suite (u_n/n) converge également vers l.
5. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $l > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge également vers l.

Exercice 23. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x^3}{4}\ .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -3$, $u_0 = -1$, $u_0 = 1$, $u_0 = 3$.
2. Déterminer les points fixes de F.
3. Montrer que $F([0,2]) \subset [0,2]$ et que $F([-2,0]) \subset [-2,0]$.
4. Montrer que (u_n) est décroissante, pour tout $u_0 \in]-\infty,-2[\cup]0,2[$, croissante pour tout $u_0 \in]-2,0[\cup]2,+\infty[$.
5. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 24. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \sqrt{2+x}\ .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 3$. Montrer que 2 est le seul point fixe de F.
2. Pour $u_0 \in [-2,2[$, montrer que (u_n) est croissante, et tend vers 2.
3. Pour $u_0 > 2$, montrer que (u_n) est décroissante, et tend vers 2.
4. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 25. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1} \ .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 1$. Montrer que 0 est le seul point fixe de F.
2. On suppose $u_0 < 0$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers 0.
3. On suppose $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) est décroissante et tend vers 0.

Exercice 26. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x + x^2) \ .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = 1/2$, $u_0 = 2$, $u_0 = -1/2$. Déterminer les points fixes de F. Montrer que $F([0,1]) \subset [0,1]$ et que $F([-1,0]) \subset [-1,0]$.
2. On suppose $u_0 \in [0,1[$. Montrer que (u_n) est décroissante et donner sa limite.
3. On suppose $u_0 > 1$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
4. On suppose $u_0 \in [-1,0]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^{-n}$. En déduire que (u_n) tend vers 0.
5. On suppose $u_0 < -1$. Montrer qu'on peut se ramener aux trois cas précédents. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 27. Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, et pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n+1} \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{n+1} \ .$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 + \frac{a-1}{n!} \ .$$

Exercice 28. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2n^2 - 2}{n^2} \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

Exercice 29. Soit a un réel et r un réel non nul et différent de 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad u_{n+1} = r\, u_n + a \ .$$

1. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique de raison r.
2. On pose $\lambda = a/(1-r)$. Montrer que la suite constante dont tous les termes sont égaux à λ est solution de l'équation de récurrence (E).
3. Montrer que la suite $(u_n - \lambda)$ est une suite géométrique.
4. En déduire l'expression suivante de u_n :

$$u_n = \frac{a}{1-r} + \left(u_0 - \frac{a}{1-r}\right) r^n \ .$$

Exercice 30. On considère l'équation de récurrence qui engendre la suite de Fibonacci :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ .$$

1. Soit r un réel. Montrer qu'une suite géométrique de raison r vérifie (E) si et seulement si r est solution de l'équation $r^2 = r + 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $u_n = a\phi^n + b(-1/\phi)^n$, où a et b sont deux réels, et ϕ est le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

   Montrer que la suite (u_n) vérifie l'équation de récurrence (E).
3. Calculer les valeurs de a et b telles que

$$\begin{cases} a + b & = & 1 \\ a\phi - b/\phi & = & 1 \end{cases}$$

4. En déduire l'expression suivante du n-ième nombre de Fibonacci :

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right) \ .$$

5. À partir de cette expression, retrouver le résultat du cours :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi \ .$$

Exercice 31. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= (a_n - b_n)/2 \\ b_{n+1} &= (a_n + b_n)/2 \ . \end{cases}$$

On pose $z_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\, z_n \ .$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \frac{1}{2^{n/2}}\, \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4} \ .$$

3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite (z_n) converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.

3 Limites et continuité

3.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 12. Soit a un réel et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf peut-être en a. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. ☐ Si f admet une limite finie en a alors f est monotone au voisinage de a.
3. ☒ Si f admet une limite en a, alors f admet une limite à droite en a.
4. ☐ Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a alors f admet une limite en a.
5. ☒ f admet l pour limite à gauche et pour limite à droite en a si et seulement si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a.

Vrai-Faux 13. Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si f n'est pas bornée, alors f tend vers l'infini quand x tend vers $+\infty$.
2. ☐ Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors f est monotone au voisinage de $+\infty$.
3. ☒ Si pour toute suite (x_n) convergeant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))$ converge vers 1, alors f a pour limite 1 en $+\infty$.
4. ☒ Si la suite $(f(n))$ converge vers 0 et la suite $(f(n+1/2))$ converge vers $1/2$, alors $f(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
5. ☐ Si f est strictement positive au voisinage de $+\infty$, alors la limite de f en $+\infty$, si elle existe, est strictement positive.

Vrai-Faux 14. Soit a un réel et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☐ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \leqslant \eta\,,\quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$
2. ☒ $\forall \varepsilon \in]0,1[\,,\ \exists \eta \in]0,1[\,,\ 0 < |x| \leqslant \eta \implies |f(x)| \leqslant \varepsilon$
3. ☐ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta,\eta]\,,\quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$
4. ☒ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta,0[\cup]0,\eta]\,,\quad |f(x)| < \varepsilon$
5. ☒ $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta,0[\cup]0,\eta]\,,\quad |f(x)| < (1/n)$
6. ☐ $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}\,,\quad |x| \leqslant (1/m) \Longrightarrow |f(x)| \leqslant (1/n)$

7. ☒ $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}\,,\quad 0 < |x| \leqslant (1/m) \Longrightarrow |f(x)| \leqslant (1/n^2)$

Vrai-Faux 15. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(1) = 1$$

Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?)

1. ☒ f est bornée au voisinage de 0.
2. ☐ f est monotone au voisinage de 0.
3. ☐ f est minorée par 1 au voisinage de 0.
4. ☒ f est minorée par 0 au voisinage de 0.
5. ☒ f est majorée par 2 au voisinage de 0.
6. ☐ la fonction $x \mapsto f(1/x)$ est bornée au voisinage de 0.
7. ☐ la fonction $x \mapsto f(\ln(x))$ est bornée au voisinage de 0.
8. ☒ la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

Vrai-Faux 16. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?)

1. ☐ $\lim\limits_{x \to 0} f(1-x) = 0$
2. ☒ $\lim\limits_{x \to 0} 1/f(x) = 1$
3. ☒ $\lim\limits_{x \to 1} 1 - 1/f(1-x) = 0$
4. ☒ $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{f(\sqrt{x})} = 1$
5. ☐ $\lim\limits_{x \to 0} f(\cos(x)) = 0$
6. ☒ $\lim\limits_{x \to 0} 1/f(\sin(x)) = 1$
7. ☐ $\lim\limits_{x \to 0} f(\mathrm{e}^{-x}) = 1$
8. ☒ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(f(\mathrm{e}^{-x})) = 0$

Vrai-Faux 17. Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de* 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^2)$
2. ☒ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x)$
3. ☒ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(\sqrt{|x|})$

4. ☐ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = o(1/\sqrt{|x|})$
5. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = O(1/|x|)$
6. ☒ $\ln(|x|) = o(1/|x|)$

Vrai-Faux 18. Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de* $+\infty$. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = O(x^2)$
2. ☒ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = O(x^3)$
3. ☐ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = o(x^2)$
4. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = o(1/x^2)$
5. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = O(\sin(1/x^3))$
6. ☒ $\ln(x) = o(x)$
7. ☐ $\mathrm{e}^{2x} = O(\mathrm{e}^x)$

Vrai-Faux 19. Soit f une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Toutes les affirmations suivantes concernent les propriétés de f *au voisinage de* 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors f est croissante au voisinage de 0.
2. ☒ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors $f^2(x)$ est équivalent à x^2.
3. ☒ Si $f(x)$ est un grand O de x, alors $f^2(x)$ est un petit o de x.
4. ☐ Si $f(x)$ est dominé par x, alors $f(x)-x$ est négligeable devant x.
5. ☒ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors $f(x)-x$ est négligeable devant x.

Vrai-Faux 20. Soit f une application continue sur $[0,1]$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ f est bornée sur $[0,1]$.
2. ☒ $f([0,1])$ est un intervalle fermé borné.
3. ☐ si le produit $f(0)f(1)$ est strictement positif, alors f est de signe constant sur $[0,1]$.
4. ☒ si le produit $f(0)f(1)$ est strictement négatif, alors f s'annule sur $[0,1]$.
5. ☐ si le produit $f(0)f(1)f(1/2)$ est strictement négatif, alors f s'annule en au moins deux points distincts de $[0,1]$.
6. ☒ les produits $f(0)f(1/2)$ et $f(1/2)f(1)$ sont strictement négatifs, alors f s'annule en au moins deux points distincts de $[0,1]$.

7. ☐ pour tout $y \in f([0,1])$, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution dans $[0,1]$.

Vrai-Faux 21. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Il existe une application continue et surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*$.
2. ☒ Il existe une application continue et bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.
3. ☒ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue et bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\varepsilon, +\varepsilon[$.
4. ☐ Il existe une application continue et bijective de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$.
5. ☒ Il existe une application continue et bijective de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$.
6. ☐ Il existe une application continue et strictement croissante de $]-1,1[$ vers $[-1,1]$.
7. ☐ Il existe une application continue et strictement croissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$.
8. ☒ Il existe une application continue et strictement décroissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$.

3.2 Exercices

Exercice 32. Soient f et g deux fonctions définies sur $]0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer les résultats suivants.

1. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}^*\ , \quad 0 < x \leq (1/m) \implies f(x) \geqslant n$$
2. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) de réels strictement positifs, convergeant vers 0, la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$.
3. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to a^+} f(x-a) = +\infty$$
4. La limite à droite de f en 0 est $\pm\infty$ si et seulement si :
$$\lim_{x \to +\infty} 1/f(1/x) = 0$$
5. Si la limite à droite de f et de g en 0 est $+\infty$, alors il en est de même pour $f+g$ et $f * g$.

Exercice 33. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels. Pour chacune des propriétés suivantes, que peut-on dire de f lorsqu'elle est vérifiée ?

1. $\forall \varepsilon > 0\ , \quad |x-a| \leqslant 1 \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$

2. $\exists \eta > 0\,, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-l| \leqslant 1$
3. $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,, \quad x-a \leqslant \eta \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies f(x)-l \leqslant \varepsilon$
5. $\exists \eta > 0\,,\ \forall \varepsilon > 0\,, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$

Exercice 34. Démontrer que les applications suivantes n'ont pas de limite à droite en 0 (ni finie, ni infinie). On rappelle que si x est une réel, $\lfloor x \rfloor$ désigne sa partie entière et $D(x)$ sa partie décimale.

1. $f\ : x \mapsto \sin(1/x)$
2. $f\ : x \mapsto D(1/x)$
3. $f\ : x \mapsto \tan(1/x)$
4. $f\ : x \mapsto \ln(x)\cos(1/x)$
5. $f\ : x \mapsto (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}$
6. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
7. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } 1/x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 35. Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite en $+\infty$ (ni finie, ni infinie).

1. $f\ : x \mapsto \sin(x)$
2. $f\ : x \mapsto \tan(x)$
3. $f\ : x \mapsto \ln(x)\cos(x)$
4. $f\ : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$
5. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
6. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 36. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}} = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{|x|}+\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}-\sqrt{|x|}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{2}{3}$$

Exercice 37. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^4+1}}{\sqrt{4x^4-3}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+2)} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x-1} = 0$$

Exercice 38. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\tan(x)(1-\cos(x))}{\sin^3(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)} = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos(x)-1} = -2$$

$$\lim_{x\to0} (1+x)^{1/x} = e \quad ; \quad \lim_{x\to0} (1-x^2)^{1/x} = 1$$

Exercice 39. Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^4\ln^2(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\ln(x)+\cos(x))}{x^2+\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x}}}{x^3\ln^3(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)\ln(\ln(x))}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\ln(\ln(x))}$$

$$\lim_{x\to0+} x^x \quad ; \quad \lim_{x\to0+} |\ln(x)|^x$$

Exercice 40. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}} = 4 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}-1)\ln(\ln(x)) = 0$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{2x-\pi} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to \pi/2} (1-\sin(x))\tan(x) = 0$$

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} = \sqrt{2} \quad ; \quad \lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\pi/4} = \sqrt{2}$$

Exercice 41. Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0. Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de* 0.

1. Si $f(x) = O(x^2)$ alors $f = o(x)$.
2. Si $xf(x) = O(x^2)$ alors $f = O(x)$.
3. Si $f(x) = o(x)$ alors $f(x) = o(\sqrt{|x|})$.
4. Si $f(x) - x = o(x)$ alors $f(x) \sim x$.
5. Si $f(x) \sim x$ alors $f(x) - x = o(x)$.
6. Si $f(x) = O(x^2)$ alors $f(x) - x \sim -x$.

Exercice 42. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de* $+\infty$.

1. Si $f(x) = O(x)$ alors $f(x) = o(x^2)$.
2. Si $xf(x) = O(x^2)$ alors $f = O(x)$.
3. Si $f(x) = o(\sqrt{x})$ alors $f(x) = o(x)$.
4. Si $f(x) - x = o(x)$ alors $f(x) \sim x$.
5. Si $f(x) \sim x$ alors $f(x) - x = o(x)$.
6. Si $f(x) = O(\sqrt{x})$ alors $f(x) - x \sim -x$.

Exercice 43. Justifier les équivalents suivants, au voisinage de 0

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-x} \sim 2x \quad ; \quad \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-x} \sim \frac{1}{x}$$

$$x^2 - 2x^3\sin(1/x) \sim x^2 \quad ; \quad \frac{x+x^2\sin(1/x)}{x^2-x^3\cos(1/x)} \sim \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \sim 2\sqrt{x} \quad ; \quad \frac{\ln^2(1+x)}{\ln(1-x)} \sim -x$$

Exercice 44. Justifier les équivalents suivants, au voisinage de $+\infty$

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-x} \sim x \quad ; \quad \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-x^4} \sim -\frac{1}{x}$$

$$\lfloor x \rfloor \sim x \quad ; \quad \frac{x^2+\cos(x)}{x+\sin(x)} \sim x$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}-2}{\mathrm{e}^x-1} \sim \mathrm{e}^x \quad ; \quad \frac{\mathrm{e}^{-2x}-2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-1} \sim 2\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 45. Pour chacune des fonctions f suivantes, démontrer *directement* qu'elle est continue en tout point de son domaine de définition, sans utiliser les théorèmes du cours.

1. $f\ : x \mapsto x^2$
2. $f\ : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
3. $f\ : x \mapsto \sqrt{x}$
4. $f\ : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Exercice 46. Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $D(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie décimale. Pour chacune des fonctions f suivantes : dire en quels points de $\mathbb{R}$ elle est continue, continue à gauche ou continue à droite, et le démontrer.

1. $f\ : x \mapsto D(x)$
2. $f\ : x \mapsto D(1-x)$
3. $f\ : x \mapsto D(1/x)$
4. $f\ : x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$
5. $f\ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + 2D(x)$
6. $f\ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{D(x)}$
7. $f\ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + D(x)^2$
8. $f\ : x \mapsto \sqrt{\lfloor x \rfloor} + D(x)$
9. $f\ : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}(D(x) - 1/2)$
10. $f\ : x \mapsto \lfloor \cos(1/x) \rfloor$
11. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
12. $f\ : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 47. Pour chacune des fonctions f suivantes : déterminer son domaine de définition, représenter son graphe, et montrer qu'elle se prolonge par continuité en une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. $f\ : x \mapsto (x^2+x)/\sqrt{|x|}$
2. $f\ : x \mapsto x\cos(1/x)$
3. $f\ : x \mapsto (1/x^2)\mathrm{e}^{-1/x^2}$
4. $f\ : x \mapsto (1/(x^2-1))\mathrm{e}^{-1/(x^2-1)^2}$
5. $f\ : x \mapsto (x^2-4)\ln(|x^2-4|)$

Exercice 48.

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, et telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(2x) = f(x)$$
Démontrer par récurrence que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad f(x) = f(2^{-n}x)$$
En déduire que f est constante.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue en 1, et telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad f(x^2) = f(x)$$
Démontrer par récurrence que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,, \quad f(x) = f(x^{1/(2n)})$$
En déduire que f est constante.

Exercice 49.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. On définit g par
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(\sqrt{x}) - f(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, croissante. On suppose que :

$$\forall y \in [f(0), f(1)]\,,\ \exists x \in [0,1]\,, \quad f(x) = y$$

Démontrer que f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 50. Pour chacune des fonctions f suivantes, définie sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$: déterminer le sens de variation de f. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans I. Donner un intervalle d'approximation d'amplitude 10^{-2} pour chaque solution.

1. $I = \mathbb{R}$, $f \ : x \longmapsto x^3 + 1$
2. $I = \mathbb{R}$, $f \ : x \longmapsto x^5 + 1$
3. $I = \mathbb{R}$, $f \ : x \longmapsto x^5 - 5x + 1$
4. $I =]-2, 0[$, $f \ : x \longmapsto 2x\sqrt{x+2} + 1$
5. $I =]-1, 0[$, $f \ : x \longmapsto x^2 - 2 + 1/\sqrt{x+1}$
6. $I =]0, 1[$, $f \ : x \longmapsto x - \cos(x)$
7. $I =]0, \pi/2[$, $f \ : x \longmapsto \tan(x) - x + 2$
8. $I = [0, +\infty[$, $f \ : x \longmapsto 2x\ln(x) - x + 1$

Exercice 51. Pour chacune des fonctions f suivantes, définie sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$: déterminer le sens de variation de f. Déterminer $f(I)$. Démontrer que f est une bijection de I vers $f(I)$.

1. $I = [0, +\infty[$, $f \ : x \longmapsto x^2$
2. $I = \mathbb{R}$, $f \ : x \longmapsto x^3$
3. $I = \mathbb{R}$, $f \ : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
4. $I = [0, \pi/2[$, $f \ : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos(x)}$
5. $I = [0, \pi/2[$, $f \ : x \longmapsto \tan(x) - x$

4 Dérivabilité et convexité

4.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 22. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est dérivable en a, alors le taux d'accroissement de f en a est prolongeable par continuité en a.
2. ☐ Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue sur un intervalle ouvert contenant a.
3. ☒ Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.
4. ☒ Si f est dérivable à gauche en a, alors f est continue à gauche en a.
5. ☐ Si f est dérivable à gauche et à droite en a, alors f est dérivable en a.
6. ☐ Si la dérivée de f en a est nulle, alors la tangente à la courbe représentative de f en a est verticale.
7. ☒ Si la tangente à la courbe représentative de f en a est verticale, alors f n'est pas dérivable en a.

Vrai-Faux 23. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La dérivée de $f + g$ est la somme des dérivées de f et de g.
2. ☐ La dérivée de fg est le produit des dérivées de f et de g.
3. ☒ Le quotient f/g est dérivable en tout point où g ne s'annule pas.
4. ☒ La fonction $x \mapsto \exp(f(x)g(x))$ est dérivable sur I.
5. ☐ La fonction $x \mapsto f(\exp(x))$ est toujours dérivable sur I.

Vrai-Faux 24. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors f' est continue sur I.
2. ☐ Si f' est dérivable sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
3. ☒ Si f' est dérivable sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
4. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors ses dérivées successives sont toutes continues sur I.
5. ☐ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $|f|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
6. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I, alors $|f|$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I.
7. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors $x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Vrai-Faux 25. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si la dérivée de f s'annule en un point de I, alors ce point est un extremum local pour f.
2. ☒ Si f prend la même valeur en deux points distincts, alors la dérivée de f s'annule entre ces deux points.
3. ☐ Si f admet un maximum local, alors f admet un maximum global.
4. ☒ Si f admet un maximum local, alors la dérivée de f s'annule en ce point.
5. ☒ Si la dérivée de f est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
6. ☒ Si la dérivée de f est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
7. ☐ Si f est strictement croissante sur I, alors sa dérivée est strictement positive sur I.
8. ☒ Si x et y sont deux points distincts tels que $f(y)-f(x)=y-x$, alors il existe $c\in]x,y[$ tel que $f'(c)=1$.

Vrai-Faux 26. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est convexe sur I, alors f est continue sur I.
2. ☒ Si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite en tout point de I.
3. ☐ Si f est convexe sur I, alors f est dérivable en tout point de I.
4. ☒ Si f est convexe et dérivable sur I, alors la dérivée de f est croissante sur I.
5. ☐ Si f et convexe et dérivable sur I, alors f est deux fois dérivable sur I.
6. ☒ Si f est deux fois dérivable sur I, et si sa dérivée seconde est positive, alors f est convexe sur I.
7. ☐ Si f est convexe et deux fois dérivable sur I, alors sa dérivée seconde ne s'annule pas sur I.

4.2 Exercices

Exercice 52. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. Donner une expression explicite du taux d'accroissement de f en un point a quelconque du domaine de définition.
2. Calculer la limite en a de ce taux d'accroissement et retrouver l'expression de la dérivée de f en a.

$$f(x)=x^2\ ;\quad f(x)=\sqrt{x}\ ;\quad f(x)=x\sqrt{x}\ ;$$
$$f(x)=\mathrm{e}^x\ ;\quad f(x)=x\mathrm{e}^x\ ;\quad f(x)=\ln(x)\ ;$$
$$f(x)=\sin(x)\ ;\quad f(x)=\cos(x)\ ;\quad f(x)=x\sin(x)\ .$$

Exercice 53. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. On suppose que f et g sont dérivables en $a\in I$ et que $g'(a)\neq 0$. Montrer que :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}\ .$$

(C'est la « Règle de l'Hôpital »).

Exercice 54. Pour chacune des applications f définies ci-dessous :

1. Verifiez que f est prolongeable par continuité en 0.
2. L'application prolongée est-elle dérivable en 0 ?

$$f(x)=x|x|\ ;\quad f(x)=\frac{x}{1+|x|}\ ;\quad f(x)=\frac{1}{1+|x|}\ ;$$
$$f(x)=\cos(\sqrt{x})\ ;\quad f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\ ;\quad f(x)=\frac{x\cos(1/x)}{\ln(|x|)}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{x}\ln|x|\ ;\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sqrt{x}}\ ;\quad f(x)=\frac{\sin(x)}{\ln|x|}\ .$$

Exercice 55. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Soit I un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{D}_f$. Démontrer que f est dérivable sur I.
3. Calculer l'expression de la dérivée de f.

$$f(x)=(x(x-2))^{1/3}\ ;\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ ;\quad f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{(x^2+1)^3}\ ;\quad f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{1/3}}\ ;\quad f(x)=\frac{(1+\sqrt{x}^2)}{1+(x+1)^{1/3}}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}\ ;\quad f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ ;\quad f(x)=\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{1+x^2\sin^2(x)}\ ;\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}^{1/x}+1}{\mathrm{e}^{1/x}-1}\ ;\quad f(x)=\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\ ;$$
$$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ;\quad f(x)=(\cos(x))^{\sin(x)}\ ;\quad f(x)=\ln\sin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\ .$$

Exercice 56. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, sur un intervalle $[a,b]$:

1. Démontrer que f est dérivable sur $]a, b[$.
2. La fonction f est-elle dérivable à droite en a ?
3. La fonction f est-elle dérivable à gauche en b ?

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)} \text{ sur } [0,1] \; ; \quad f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-x)} \text{ sur } [-1,1] \; ;$$

$$f(x) = x^{2/3}(1-x)^{3/2} \text{ sur } [0,1] \; ; \quad f(x) = (1-x^2)^{2/3}(1-x)^{1/3} \text{ sur } [-1,1] \; ;$$

$$f(x) = \sqrt{x\sin(x)(1-\sin(x))} \text{ sur } [0,\pi/2] \; ;$$

$$f(x) = \sqrt{(1-\cos(x))(1-\sin(x))} \text{ sur } [0,\pi/2] \; .$$

Exercice 57. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée d'ordre k des fonctions suivantes.

$$x \mapsto \frac{1}{1+x} \; ; \quad x \mapsto \frac{1}{1-x} \; ; \quad x \mapsto \ln(1-x^2) \; ;$$

$$x \mapsto x^2 \,\mathrm{e}^x \; ; \quad x \mapsto x^2 \ln(1+x) \; ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \; ;$$

$$x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \; ; \quad x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x) \; ; \quad x \mapsto \cos^3(x) \; .$$

Exercice 58.

1. Déterminer les réels α et β tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si} \quad x > 0 \; . \end{cases}$$
2. Déterminer les réels α, β et γ tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \text{si} \quad x > 0 \; . \end{cases}$$
3. Déterminer les réels α et β tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
$$f(x) = \begin{cases} x^2\mathrm{e}^{1-x} - 2 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ \alpha x \mathrm{e}^{\beta x^2} & \text{si} \quad x < 1 \; . \end{cases}$$

Exercice 59. On dit qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *paire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. On dit qu'elle est est *impaire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 60. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{si} \quad x < a \\ 0 & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ f(x-b) & \text{si} \quad x > b \,. \end{cases}$$

   Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Représenter graphiquement h pour $a = 1$ et $b = 2$.

Exercice 61. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, dérivable à gauche et à droite en tout point de $]a, b[$. On suppose que f est continue à gauche en a, à droite en b et que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que le produit de la dérivée à gauche en c par la dérivée à droite en c soit négatif ou nul.

Exercice 62. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) \,.$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 63. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Montrer que le théorème de Rolle s'applique à la fonction

$$x \longmapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \,.$$

2. En déduire qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \,.$$

Exercice 64. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On suppose que f' est croissante sur $]0, +\infty[$. Démontrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x)/x$ est croissante.

Exercice 65.

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.
2. Soient a et b deux réels et n un entier naturel. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ a au plus trois solutions réelles.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule solution réelle positive.
4. Soit a un réel positif et n un entier naturel pair. Montrer que l'équation $(x+a)^n = x^n + a^n$ admet $x = 0$ pour seule solution réelle.

Exercice 66.

1. Soient α, β et γ trois réels. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \ .$$
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Déterminer le point $c \in \,]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \ .$$
2. Soient α, β et γ trois réels. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma \mathrm{e}^x \ .$$
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Déterminer le point $c \in \,]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \ .$$

Exercice 67. Utiliser le théorème des accroissements finis pour donner un majorant des réels suivants. Comparer ce majorant avec une approximation numérique à 10^{-6} près.
$$\sqrt{10001} - 100 \ ; \quad \frac{1}{0.998} - 1 \ ; \quad 0.001 - \frac{1}{1003} \ ;$$
$$\sin(3.14) \ ; \quad 1 - \cos(0.002) \ ; \quad 1 - \sin(1.57) \ ;$$
$$\ln(1.001) \ ; \quad \ln(2.72) - 1 \ ; \quad \mathrm{e}^{0.002} - 1 \ .$$

Exercice 68.

1. (a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :
$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \ .$$
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ .$$
Démontrer que pour tout n,
$$S_{n+1} - 1 < 2\sqrt{n+1} < S_n \ .$$

2. (a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a} .$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

Démontrer que pour tout n,

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n .$$

Exercice 69.

1. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction exponentielle pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 .$$

(b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1 - x)/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

2. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction logarithme pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 .$$

(b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\ln(1+x) - x)/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} .$$

3. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction cosinus pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 .$$

(b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (1 - \cos(x))/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

(c) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\sin(x) - x)/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0 \ .$$

(d) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\sin(x) - x)/x^2$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \ .$$

Exercice 70. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in]a, b[$, $f''(x) \leqslant 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$.

Exercice 71. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$ et $f''(x) \geqslant 0$.

1. Montrer que si f est majorée alors f est constante.
2. Montrer que si f n'est pas majorée, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ .$$

3. Montrer que la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)/x$ existe, et qu'elle est soit infinie, soit finie et strictement positive.
4. Soit $f \ : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$. Montrer que f vérifie les hypothèses de l'exercice, et calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)/x$.

Exercice 72. Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I, dérivable en un point $c \in I$, et telle que $f'(c) = 0$. Montrer que c est un minimum global pour f sur I :

$$\forall x \in I \ , \quad f(c) \leqslant f(x) \ .$$

Exercice 73.

1. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ .$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ .$$

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Exercice 74. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \ .$$

2. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1 \ .$$

   Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant 1 \ .$$

3. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \ .$$

4. Soit $p > 1$. Démontrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \ .$$

   (On posera $q = p/(p-1)$ et $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$).

5 Fonctions usuelles

5.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 27. Soit a un réel strictement positif, x et y deux réels quelconques. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $a^{x-y} = a^x/a^y$.
2. ☐ $a^{(x^y)} = a^{xy}$.
3. ☐ $a^{2xy} = a^{x^2}\,a^{y^2}$.
4. ☒ $a^{(x+y)/2} = \sqrt{a^x\,a^y}$.
5. ☒ $a^{-x+y/2} = \sqrt{a^y}/a^x$.
6. ☐ $a^{2x-y} = (a^x/a^y)^2$.

Vrai-Faux 28. Soient a et b deux réels strictement positifs. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\ln(\sqrt{a/b}) = (1/2)(\ln(a) - \ln(b))$.
2. ☐ $\ln((ab)/2) = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.
3. ☐ $\ln(a^b) = (\ln(a))^{\ln(b)}$.
4. ☒ $\ln((a^2)^b) = 2b\ln(a)$.
5. ☐ $\ln(a^2/b^2) = -2\ln(ab)$.
6. ☒ $\ln(a^2/b) = \ln(a) - \ln(b/a)$.

Vrai-Faux 29. Soit a un réel strictement positif. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\ln(\mathrm{e}^{\sqrt{a}}) = a/2$.
2. ☒ $\ln(a^{\mathrm{e}}) = \mathrm{e}\ln(a)$.
3. ☐ $\mathrm{e}^{\ln^2(a)} = a^2$.
4. ☐ $\mathrm{e}^{\ln(a/2)} = a - 2$.
5. ☒ $\ln(a^{\mathrm{e}+a}) = (\mathrm{e}+a)\ln(a)$.
6. ☒ $\mathrm{e}^{2\ln(a)-\ln(a)/2} = a^{3/2}$.

Vrai-Faux 30. Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sin(x - 3\pi) = -\sin(x)$.
2. ☐ $\sin(x + 3\pi) = \sin(x)$.
3. ☒ $\cos(3\pi - x) = -\cos(x)$.
4. ☒ $\cos(-x - 3\pi) = -\cos(x)$.

5. $\square$ $\sin(x+3\pi) = \sin(x)$.
6. $\boxtimes$ $\sin(x+3\pi/2) = -\cos(x)$.
7. $\square$ $\cos(x-3\pi/2) = \sin(x)$.
8. $\boxtimes$ $\cos(x+3\pi/2) = \sin(x)$.

Vrai-Faux 31. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ $\sin(-7\pi/2) = 1$.
2. $\square$ $\sin(5\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
3. $\square$ $\sin(8\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.
4. $\boxtimes$ $\cos(9\pi/2) = 0$.
5. $\square$ $\cos(-7\pi/3) = -1/2$.
6. $\boxtimes$ $\cos(-7\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
7. $\boxtimes$ $\tan(-7\pi/3) = -\sqrt{3}$.
8. $\boxtimes$ $\tan(-7\pi/4) = 1$.
9. $\square$ $\tan(-7\pi/6) = -\sqrt{3}/3$.

Vrai-Faux 32. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\square$ $\lim_{x\to-\pi/2^-} \tan(x) = -\infty$.
2. $\square$ $\lim_{x\to-\pi^+} \tan(x) = +\infty$.
3. $\boxtimes$ $\lim_{x\to5\pi/2^+} \tan(x) = -\infty$.
4. $\boxtimes$ $\lim_{x\to-5\pi/2^+} \tan(x) = -\infty$.
5. $\square$ $\lim_{x\to7\pi/2^-} \tan(x) = -\infty$.

Vrai-Faux 33. Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
2. $\square$ $\cos(2x) - \sin(2x) = (\cos(x) + \sin(x))^2 + 2\sin^2(x)$.
3. $\boxtimes$ $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
4. $\square$ $\cos(x) + \cos(3x) = 2\sin(x)\sin(2x)$.
5. $\square$ $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(x)\cos(2x)$.
6. $\boxtimes$ $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$.

Vrai-Faux 34. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\arccos(-1/2) = -\pi/3$.
2. ☒ $\arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$.
3. ☒ $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$.
4. ☐ $\arcsin(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$.
5. ☒ $\arctan(-1) = -\pi/4$.
6. ☐ $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/6$.

Vrai-Faux 35. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\forall x \in [-1,1]\ , \quad \sin(\arcsin(x)) = x$.
2. ☐ $\forall x \in [-\pi,\pi]\ , \quad \arcsin(\sin(x)) = x$.
3. ☒ $\forall x \in [-1,1]\ , \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. ☒ $\forall x \in [-1,1]\ , \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
5. ☐ $\forall x \in [-\pi/2,\pi/2]\ , \quad \arcsin(\cos(x)) = \pi/2 - x$.
6. ☒ $\forall x \in [0,\pi/2]\ , \quad \arccos(\sin(x)) = \pi/2 - x$.
7. ☐ $\forall x \in [-\pi/2,\pi/2]\ , \quad \arctan(\sin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. ☐ $\forall x \in [-1,1]\ , \quad \tan(\arccos(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. ☒ $\forall x \in \,]-1,1[\ , \quad \tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Vrai-Faux 36. Soit x un réel quelconque. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sinh(x) < \cosh(x)$.
2. ☒ $-1 < \tanh(x) < 1$.
3. ☐ $\cosh(2x) = 2\cosh(x) - 1$.
4. ☒ $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.
5. ☐ $\sinh(x) + \cosh(-x) = \mathrm{e}^{-x}$.
6. ☒ $\sinh(2x) + \cosh(2x) = \mathrm{e}^{2x}$.
7. ☒ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$.
8. ☐ $\cosh(x) + \cosh(3x) = 2\sinh(x)\sinh(2x)$.
9. ☒ $\sinh(x) + \sinh(3x) = 2\sinh(2x)\cosh(2x)$.
10. ☐ $\sinh(3x) - \sinh(x) = 2\cos(hx)\sinh(2x)$.

Vrai-Faux 37. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\square$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{argcosh}(\cosh(x)) = x$.
2. $\boxtimes$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{argsinh}(\sinh(x)) = x$.
3. $\boxtimes$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{argtanh}(\tanh(x)) = x$.
4. $\boxtimes$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\quad \cosh(\operatorname{argcosh}(x)) = x$.
5. $\square$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{argcosh}(\sinh(x)) = 1 - x$.
6. $\square$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{argtanh}(\sinh(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. $\square$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\quad \tanh(\operatorname{argcosh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
8. $\boxtimes$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \tanh(\operatorname{argsinh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5.2 Exercices

Exercice 75. 1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} < 2\sqrt[n]{n} \,.$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 7$:

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} \,.$$

Exercice 76. Déterminer $x \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant l'équation (E).

1. $(E) \qquad 5(3^x) = 3(5^x)$.
2. $(E) \qquad x^x = \sqrt{2}/2$.
3. $(E) \qquad x^x = 3\sqrt{6}/4$.
4. $(E) \qquad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 77. Déterminer le couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, vérifiant le système d'équations (S).

1. $(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 8^x & = & 10^y \\ 2^x & = & 5^y \,. \end{array} \right.$
2. $(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \,. \end{array} \right.$
3. $(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} xy & = & 2^2 \\ \ln^2(x)+\ln^2(y) & = & \frac{5}{2}\ln^2(2) \,. \end{array} \right.$
4. $(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x^{x+y} & = & y^4 \\ y^{x+y} & = & x \,. \end{array} \right.$

Exercice 78.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{1}{2}\Big(\ln(a)+\ln(b)\Big) \iff a^2+b^2 = 14\,ab\;.$$

2. Soit a un réel strictement positif, différent de 1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}\;.$$

3. Déterminer l'ensemble des triplets de réels (a,b,c) tels que :

$$\log_{c+b}(a) + \log_{c-b}(a) = 2\log_{c+b}(a)\log_{c-b}(a)\;.$$

Exercice 79. Démontrer les formules de trigonométrie suivantes.

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)\;;$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}\;;\quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}\;;$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)\;;\quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\;;$$

$$\text{en notant : } t = \tan(x/2)\;,\quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\;,\quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\;,\quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}\;;$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\;;\quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\;;$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)\;;$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)\;;$$

$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\;;$$

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\;.$$

Exercice 80. On pose :

$$F = \Big\{\,\arcsin\,,\ \arccos\,,\ \arctan\,\Big\} \quad\text{et}\quad G = \Big\{\,\sin\,,\ \cos\,,\ \tan\,\Big\}\;.$$

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.

2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

Exercice 81. Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{x}{|x|}$.
3. $\sin(2 \arctan(x)) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
4. $\tan(3 \arctan(x)) = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

Exercice 82. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

1. $(E) \qquad \arccos(x) = \arcsin(1/3) + \arcsin(1/4)$.
2. $(E) \qquad \arcsin(x) = \arcsin(2/5) + \arcsin(3/5)$.
3. $(E) \qquad \arcsin(\tan(x)) = x$.
4. $(E) \qquad \arcsin(2x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.
5. $(E) \qquad \arccos(x) = 2 \arccos(3/4)$.
6. $(E) \qquad 2 \arccos(x) = \arccos(|2x^2 - 1|)$.
7. $(E) \qquad \arccos(x) = \arcsin(1 - x)$.
8. $(E) \qquad \arctan(x) = 2 \arctan(1/2)$.
9. $(E) \qquad \arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1 + x^2} - x) = \pi/2$.
10. $(E) \qquad \arctan(x - 1) + \arctan(x) + \arctan(x + 1) = \pi/2$.
11. $(E) \qquad \arctan(x) + \arctan(2x) = \pi/4$.

Exercice 83. Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b) \ ;$$

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b) \ ;$$

$$\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sin^2(a) = 2 \cosh^2(a) - 1 = 1 + 2 \sinh^2(a) \ ;$$

$$\cosh^2(a) = \frac{\cosh(2a) + 1}{2} \ ; \quad \sinh^2(a) = \frac{\cosh(2a) - 1}{2} \ ;$$

$$\sinh(2a) = 2 \sinh(a) \cosh(a) \ ; \quad \tanh(2a) = \frac{2 \tanh(a)}{1 - \tanh^2(a)} \ ;$$

$$\text{en notant : } t = \tanh(x/2) \ , \ \sinh(x) = \frac{2t}{1 - t^2} \ , \ \cosh(x) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \ , \ \tanh(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \ ;$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}\ ; \quad \tanh(a-b) = \frac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}\ ;$$

$$\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2}\Big(\cosh(a+b)-\cosh(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}\Big(\sinh(a+b)+\sinh(a-b)\Big)\ ;$$

$$\sinh(a)+\sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\ ;$$

$$\cosh(a)+\cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\ .$$

Exercice 84. Soit n un entier. Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cosh(kx) = \frac{\sinh((n+\frac{1}{2})x)+\sinh(x/2)}{2\sinh(x/2)}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sinh(kx) = \frac{\cosh((n+\frac{1}{2})x)+\cosh(x/2)}{2\sinh(x/2)}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)+\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \frac{-\cos((n+\frac{1}{2})x)+\cos(x/2)}{2\sin(x/2)}$.
5. $\displaystyle\frac{\sin(x)+\sin(nx)+\sin((2n-1)x)}{\cos(x)+\cos(nx)+\cos((2n-1)x)} = \tan(nx)$.
6. $\displaystyle\frac{\sinh(x)+\sinh(nx)+\sinh((2n-1)x)}{\cosh(x)+\cosh(nx)+\cosh((2n-1)x)} = \tanh(nx)$.

Exercice 85. On pose :

$$F = \Big\{\ \mathrm{argsinh}\,,\ \mathrm{argcosh}\,,\ \mathrm{argtanh}\ \Big\} \quad \text{et} \quad G = \Big\{\ \sinh\,,\ \cosh\,,\ \tanh\ \Big\}\,.$$

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.
2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

Exercice 86. Vérifier que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x tel que les expressions écrites aient un sens.

1. $\mathrm{argtanh}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \ln(x)$.

2. $\operatorname{argsinh}(3x+4x^3) = 3\operatorname{argsinh}(x)$.
3. $\cosh(2\operatorname{argtanh}(x)) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.
4. $\sinh\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{argcosh}(x)\right) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$.
5. $\operatorname{argcosh}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cosh(x)}{2}}\right) = \dfrac{x}{2}$.
6. $2\operatorname{argtanh}(\tan(x)) = \operatorname{argtanh}(\sin(2x))$.

Exercice 87. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

1. (E) $\qquad \operatorname{argsinh}(x) = \operatorname{argsinh}(2-x)$.
2. (E) $\qquad \operatorname{argcosh}(4x^3-3x) - \operatorname{argcosh}(2x^2-1) = 1$.

6 Développements limités

6.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 38. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f(x) = x + x^2 + o(x^4)$. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☐ La fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0.
2. ☒ La fonction f est continue en 0.
3. ☒ La dérivée de f en 0 est égale à 1.
4. ☐ Si f est 2 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(2)}(0) = 1$.
5. ☒ Si f est 3 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(3)}(0) = 0$.
6. ☐ La fonction $x \mapsto f(x)/x$ admet un développement limité d'ordre 3 en 0.
7. ☒ La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ admet un développement limité d'ordre 5 en 0.
8. ☐ $f^2(x) = x^2 + x^4 + o(x^6)$.
9. ☒ $f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^6)$.
10. ☐ $f(2x) = 2x + 2x^2 + o(x^4)$.
11. ☐ $f(x^4) = o(x^4)$.
12. ☒ $f(2x^2) \sim 2x^2$.

Vrai-Faux 39. Soient f et g deux fonctions, admettant un développement limité d'ordre 2 en 0. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☒ La fonction $f + g$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
2. ☒ La fonction fg admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
3. ☐ La fonction f/g admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
4. ☒ La fonction $x \mapsto x^2 f(x)g(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
5. ☐ La fonction $x \mapsto x^2 f(x) + g(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
6. ☐ La fonction $x \mapsto f^2(x)g^2(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.

Vrai-Faux 40. Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = x + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) = -x + x^3 + o(x^3)\ .$$

On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☒ $f(x) + g(x) = o(x^2)$.
2. ☐ $f(x) - g(x) = o(x)$.
3. ☐ $f(x) + 2g(x) = o(f(x))$.
4. ☒ $2f(x) + g(x) \sim f(x)$.
5. ☐ $f(x)g(x) = -x^2 + x^6 + o(x^6)$.

6. $\boxtimes$ $f^2(x) - g^2(x) \sim 4x^4$.
7. $\square$ $f^2(x)g(x) \sim x^3$.
8. $\boxtimes$ $f(x)g^2(x) \sim x^3$.

Vrai-Faux 41. Soit n un entier quelconque. On note f la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, prolongée par continuité en 0. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ Pour tout n, f admet un développement limité d'ordre n en 0.
2. $\square$ Pour tout n, le développement limité d'ordre n de f ne contient que des termes impairs.
3. $\square$ Pour tout n, $x \mapsto f(x)/x$ admet un développement limité d'ordre n en 0.
4. $\boxtimes$ $f(x^2) - 1 = O(x^4)$.
5. $\boxtimes$ $(f(x) - 1)^2 = O(x^4)$.
6. $\square$ $f(x) - \cos(x) = O(x^4)$.
7. $\boxtimes$ $f(x) - \cos(x/\sqrt{3}) = O(x^4)$.

Vrai-Faux 42. Soient n un entier et f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Les propositions portent sur des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que f est *paire*. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. $\square$ Le développement de $1/f$ ne contient que des termes impairs.
2. $\square$ Le développement de $x \mapsto f(x^3)$ ne contient que des termes impairs.
3. $\boxtimes$ Le développement de $x \mapsto f(\sin(x))$ ne contient que des termes pairs.
4. $\boxtimes$ Le développement de $x \mapsto \sin(x)f(x)$ ne contient que des termes impairs.
5. $\square$ Le développement de $x \mapsto xf(x)/|x|$ ne contient que des termes impairs.
6. $\boxtimes$ Le développement de f'' ne contient que des termes pairs.
7. $\square$ Si F est une primitive quelconque de f, le développement de F ne contient que des termes impairs.

Vrai-Faux 43. Sit n un entier. Les propositions suivantes portent sur des développements limités d'ordre n en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ $\dfrac{1}{1-2x} = 1 + 2x + \cdots + 2^n x^n + o(x^n)$.
2. $\square$ $\dfrac{1}{2-x} = 1 + (1-x) + \cdots + (1-x)^n + o(x^n)$.
3. $\boxtimes$ $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + \cdots + \dfrac{x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$.
4. $\boxtimes$ $\dfrac{1}{2+3x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3x}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$.

5. $\square$ $\dfrac{1+x}{1-x} = 1 + 2x - 2x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2x^n}{2^n+1} + o(x^n)$.
6. $\square$ $\dfrac{1-x}{1+x} = 1 + 2x - 2x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2x^n}{2^n+1} + o(x^n)$.
7. $\boxtimes$ $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n)$.
8. $\square$ $\dfrac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + 3nx^n + o(x^n)$.

Vrai-Faux 44. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\square$ $\mathrm{e}^{x-1} = x + o(x)$.
2. $\boxtimes$ $\mathrm{e}^{x-1} = 1/\mathrm{e} + o(1)$.
3. $\boxtimes$ $\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$.
4. $\square$ $\mathrm{e}^{x^2-1} = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,x^2 + o(x^2)$.
5. $\boxtimes$ $\mathrm{e}^{(x-1)^2} = \mathrm{e} - 2\mathrm{e}\,x + 3\mathrm{e}\,x^2 + o(x^2)$.
6. $\square$ $(\mathrm{e}^x - 1)^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$.
7. $\square$ $(\mathrm{e}^x)^2 - 1 = o(x)$.
8. $\boxtimes$ $(\mathrm{e}^x)^2 - 1 - 2x = 2x^2 + o(x^2)$.

Vrai-Faux 45. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\square$ $\sin(2x) = 2x - x^3/3 + o(x^3)$.
2. $\boxtimes$ $\sin(\pi/2 - x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$.
3. $\boxtimes$ $\sin(\tan(x)) = x + o(x^2)$.
4. $\square$ $\sin(\sin(x)) = x - x^3/6 + o(x^3)$.
5. $\boxtimes$ $\cos(\sin(x)) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$.
6. $\square$ $\sin(\cos(x)) = o(x)$.
7. $\square$ $\tan(\sin(x)) = x + x^3/3 + o(x^3)$.
8. $\boxtimes$ $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x)) = o(x^6)$.

Vrai-Faux 46. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\square$ $\sqrt{2+x} = 1 + (1+x)/2 + o(1+x)$.
2. $\square$ $\sqrt{4+x} = 2 + x/2 + o(x)$.
3. $\boxtimes$ $1/\sqrt{4+x} = 1/2 - x/16 + o(x)$.
4. $\square$ $\sqrt[3]{3+x} = 1 + x/3 + o(x)$.
5. $\boxtimes$ $1/\sqrt[3]{1-3x} = 1 + x + o(x)$.

6. ☒ $\sqrt[3]{1+3x^3} = 1 + x^3 + o(x^5)$.
7. ☒ $(8+3x)^{2/3} = 4 + x + o(x)$.
8. ☐ $(8+3x)^{-2/3} = 1/4 + x + o(x)$.

Vrai-Faux 47. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\ln(1-x) = -x + x^2/2 + o(x^2)$.
2. ☒ $\ln(1-x^2) = -x^2 - x^4/2 - x^6/3 + o(x^6)$.
3. ☐ $\ln(1+\mathrm{e}^x) = 1 + x + o(x)$.
4. ☒ $\ln(\cos(x)) = -x^2/2 + o(x^3)$.
5. ☒ $\ln(1+\cos(x)) = \ln(2) - x^2/4 + o(x^3)$.
6. ☐ $\ln(1+\sin(x)) = x + o(x^2)$.
7. ☒ $\ln(1+\sin(x)) - \ln(1+\tan(x)) = o(x^2)$.
8. ☐ $\ln(1+x^2) - \ln((1+x)^2) = o(x)$.

Vrai-Faux 48. Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
2. ☐ $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. ☐ $\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
4. ☒ $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
5. ☒ $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln(x) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
6. ☐ $x^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
7. ☒ $\mathrm{e}^{-x} = o\left(\frac{1}{x^{314}}\right)$.

Vrai-Faux 49. Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de 0^+. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x} + x/2 + o(x)$.
2. ☒ $\sqrt{x+\sqrt{x}} = x^{1/4} + x^{3/4}/2 + o(x^{3/4})$.
3. ☐ $\cos(x^{2/5}) = 1 + o(x)$.
4. ☐ $\sin(\sqrt[3]{x^3+x^5}) = x + o(x^2)$.
5. ☒ $\frac{\ln(x)}{\sin(x)} = \frac{\ln(x)}{x} + o(x\ln(x))$.

6. $\boxtimes$ $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(x)} = \dfrac{\ln(x)}{2x} + o(x\ln(x))$.
7. $\square$ $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})} = \dfrac{\ln(x)}{2x} + o(x\ln(x))$.
8. $\boxtimes$ $\dfrac{\ln(\sqrt{1+x})}{\sin(\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} + o(\sqrt{x})$.

6.2 Exercices

Exercice 88. Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f \ : x \mapsto \sin(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \cos(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \mathrm{e}^x \ ,$$

$$f \ : x \mapsto \ln(1+x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arctan(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arcsin(x) \ ,$$
$$f \ : x \mapsto \sinh(x^2) \ , \quad f \ : x \mapsto \cosh(x^2) \ , \quad f \ : x \mapsto \ln(1+x^2) \ .$$

1. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre $n = 5$. Écrire le polynôme de Taylor P_5.
2. Pour $x = 0.1$ puis $x = 0.01$, donner une valeur numérique approchée de $f(x) - P_5(x)$.

Exercice 89. Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f \ : x \mapsto \sin(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \cos(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \mathrm{e}^x \ ,$$

$$f \ : x \mapsto \ln(1+x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arctan(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arcsin(x) \ ,$$

1. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(2x)$.
2. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(x/3)$.
3. Ecrire le développement limité d'ordre 10 en 0 de $x \mapsto f(x^2)$.
4. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(x+x^2)$.

Exercice 90. Démontrer les résultats suivants.

1. $\cos(x)\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.
2. $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$.
3. $\dfrac{1}{1-\sin(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$.
4. $\dfrac{1}{1-\arctan(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$.
5. $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x + \dfrac{2x^3}{3} + o(x^4)$.

6. $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.
7. $\ln(1 + x^2 \sin(x)) = x^3 - \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$.
8. $\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$.
9. $\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2) = -2x^2 - x^3 + 7x^4 + o(x^4)$.
10. $\cosh(1 - \cos(x)) = 1 + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.
11. $\cos(1 - \cosh(x)) = 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.
12. $\sin(x - \arctan(x)) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + o(x^8)$.
13. $\sin(x - \arctan(x)) - x + \arctan(x) = o(x^8)$.
14. $\cosh(1 - \cos(x)) + \cos(\cosh(x) - 1) = 2 - \frac{x^6}{24} + o(x^6)$.
15. $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x)) = \frac{x^5}{3} + o(x^8)$.
16. $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x))^2 = \frac{x^8}{9} + o(x^{11})$.
17. $\arcsin(\ln(1 + x^2)) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$.
18. $\frac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} + o(x^4)$.
19. $\frac{\arctan(x) - x}{\tan(x) - x} = -1 + x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.
20. $\frac{1}{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{36} + o(x^3)$.
21. $(1 + x)^{1/(1+x)} = 1 + x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$.
22. $\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$.
23. $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{\mathrm{e}x^3}{48} + o(x^3)$.
24. $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{x^2}{60\sqrt{\mathrm{e}}} + o(x^3)$.
25. $\ln(2 + x + \sqrt{1+x}) = \ln(3) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$.

26. $\ln(2\cos(x)+\sin(x)) = \ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5x^2}{8} + \dfrac{5x^3}{24} + o(x^3)$.
27. $\arctan(\mathrm{e}^x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{12} + o(x^4)$.

Exercice 91. Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre $2n$ en 0 de la fonction $x \mapsto 1/(1-x^2)$.

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}) \ .$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis composer avec $x \mapsto x^2$.
2. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $1/(1+x)$, puis calculer la demi-somme.
3. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $1/(1+x)$, puis calculer le produit.

Exercice 92. Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-2}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n) \ .$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = -2$, puis composer avec $x \mapsto -x$.
2. Écrire le développement d'ordre $n+1$ de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis dériver.
3. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis élever au carré.
4. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis composer avec $x \mapsto 2x - x^2$.

Exercice 93. Soit n un entier. Démontrer les résultats suivants (utiliser une décomposition en éléments simples si nécessaire).

1. $\dfrac{1}{2+x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{8} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}} + o(x^{2n})$.
2. $\dfrac{1}{(x-4)^2} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{x}{32} + \dfrac{3x^2}{4^4} + \cdots + \dfrac{(n+1)x^n}{4^{n+2}} + o(x^n)$.
3. $\dfrac{x^2}{x-4} = -\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{16} - \cdots - \dfrac{x^n}{4^{n-1}} - \cdots + o(x^n)$.
4. $\dfrac{x^2}{x^2-4} = -\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{16} - \cdots - \dfrac{x^{2n}}{4^n} - \cdots + o(x^{2n})$.
5. $\dfrac{x^2}{x^2+4} = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{16} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{4^n} + \cdots + o(x^{2n})$.

6. $\dfrac{x}{(1-2x)(1-4x)} = 1 + 6x + 28x^2 + \cdots + 2^n(2^{n+1}-1)x^n + o(x^n)$.
7. $\dfrac{x}{2x^2-3x+1} = x + 3\,x^2 + \cdots + (-1+2^n)\,x^n + \cdots + o(x^n)$.
8. $\dfrac{x^3}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{2}x^3 + \cdots + \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{(-2)^{2-n}}{3}\right)x^n + o(x^n)$.
9. $\dfrac{x^3+1}{x^2+x-2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3x^2}{8} + \cdots + \left(-\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3}(-2)^{-n-1}\right)x^n + \cdots + o(x^n)$.
10. $\dfrac{x-6x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-6x)} = x + 12x^2 + \cdots + \dfrac{(2^n-1)(3^n-1)x^n}{2} + o(x^n)$.

Exercice 94.

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :
$$x \mapsto \sin^2(x)\ , \quad x \mapsto \cos^2(x)\ , \quad x \mapsto \sin(x)\cos(x)\ .$$
3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\ , \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}\ , \quad \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}\ .$$

Exercice 95.

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :
$$x \mapsto \sinh^2(x)\ , \quad x \mapsto \cosh^2(x)\ , \quad x \mapsto \sinh(x)\cosh(x)\ .$$
3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :
$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}\ , \quad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}\ ,$$
$$\sinh(x)\cosh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2}\ .$$

Exercice 96. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction arc sinus.
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\ .$$
On notera a, b, c les trois réels (supposés inconnus) tels que $\arcsin(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.

1. Écrire le développement limité d'ordre 4 de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$. En déduire les valeurs de a, b, c.
2. Écrire les développements limités d'ordre 4 de sin puis de $\sin \circ \arcsin$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 5 de cos, puis de $\cos \circ \arcsin$, puis de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. En utilisant la formule $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire, en fonction de a, b, c, les développement limités d'ordre 6 de la primitive de arcsin nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \mapsto x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 97. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction argument sinus hyperbolique.

$$\operatorname{argsinh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\ .$$

On notera a, b, c les trois réels (supposés inconnus) tels que $\operatorname{argsinh}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.

1. On rappelle la formule $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer le développement limité d'ordre 5 de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$. Calculer les valeurs de a, b, c.
2. On rappelle que la dérivée de argsinh est la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-1/2}$. Calculer le développement limité d'ordre 4 de cette fonction. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 4 de sinh puis de $\sinh \circ \operatorname{argsinh}$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire les développements limités d'ordre 5 de cosh, puis de $\cosh \circ \operatorname{argsinh}$. En utilisant la formule $\cosh(\operatorname{argsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$, retrouver les valeurs de a, b, c.
5. Écrire, en fonction de a, b, c, les développement limités d'ordre 6 de la primitive de argsinh nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \mapsto x \operatorname{argsinh}(x) - \sqrt{1+x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 98. Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par deux méthodes différentes, le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction argument tangente hyperbolique.

$$\operatorname{argtanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)\ .$$

1. On rappelle que $\operatorname{argtanh}(x)$ est la primitive, nulle en 0, de la fonction $x \mapsto 1/(1-x^2)$. Écrire le développement limité d'ordre n de $\operatorname{argtanh}'$, et en déduire celui de argtanh.
2. On rappelle la formule :

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big)\ .$$

Ecrire les développements limités d'ordre n de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$, en déduire celui de argtanh.

Exercice 99.

1. Écrire les développements limités d'ordre 5 en 0, des fonctions sin, arcsin, sinh, argsinh, tan, arctan tanh, argtanh.
2. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$\begin{aligned} \tanh(x) \leqslant \arctan(x) \leqslant \sin(x) \leqslant \operatorname{argsinh}(x) \leqslant x \\ \leqslant \sinh(x) \leqslant \arcsin(x) \leqslant \tan(x) \leqslant \operatorname{argtanh}(x)\ . \end{aligned}$$

Exercice 100. Démontrer les résultats suivants.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\mathrm{e}^x + 1) - 2(\mathrm{e}^x - 1)}{x^3} = \frac{1}{6}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} = \frac{1}{2}$.
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{1}{3}$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x)}{(\mathrm{e}^x - 1)\sin(x)} = \frac{3}{2}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(x) - x^2}{\cos(x^2) - 1} = \frac{2}{3}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)} = -1$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)} = 2$.
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x) - \sinh(2x)}{(1 - \cos(3x))\arctan(x)} = -\frac{4}{27}$.
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{1/3} - 1 - \sin(x) - x}{1 - \cos(x)} = -2$.

15. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2} = -\frac{12}{13}$.

16. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\sinh(\tanh(x)) - \tanh(\sinh(x))} = -1$.

17. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x))} = 1$.

Exercice 101. Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f \ : x \mapsto \sin(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \cos(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \mathrm{e}^x \ ,$$

$$f \ : x \mapsto \ln(1+x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arctan(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arcsin(x) \ ,$$

$$f \ : x \mapsto 1/(1-x) \ , \quad f \ : x \mapsto \sqrt{1+x} \ , \quad f \ : x \mapsto 1/\sqrt{1+x} \ .$$

1. Écrire le développement limité d'ordre 5 de f en 0. Ce développement sera utilisé pour toutes les questions suivantes.
2. Écrire un développement asymptotique au voisinage de 0^+ pour $f(\sqrt{x})$.
3. Écrire un développement asymptotique au voisinage de 0^+ pour $f(x^x - 1)$.
4. Écrire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ pour $f(1/x)$.
5. Écrire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ pour $f(\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 102. Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de 0^+.

1. $\displaystyle \frac{1}{\ln^2(1+x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{12} + o\,(x)$.
2. $\displaystyle \frac{1}{\sin^3(x^2)} = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2x^2} + o\,(x)$.
3. $\displaystyle \sqrt{x+2x^3} = x^{1/2} + x^{5/2} - \frac{x^{7/2}}{2} o\left(x^{7/2}\right)$.
4. $\displaystyle \frac{\sqrt{x+x^3}}{\sqrt[3]{x+x^2}} = x^{1/6} - \frac{x^{7/6}}{3} + \frac{13x^{13/6}}{18} + o\left(x^{13/6}\right)$.
5. $\displaystyle x^x = 1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + o(x^2\ln(x))$.
6. $\displaystyle \left(\frac{1+\ln(x)}{\ln(x)}\right)^x = 1 + \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x}{2\ln^2(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^2(x)}\right)$.

Exercice 103. Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$.

1. $\displaystyle \frac{1}{2+x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

2. $\dfrac{1+x^2}{(1+x)(2-x)} = -1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
3. $\dfrac{1}{x\sin(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{7}{360x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.
4. $\dfrac{1}{x\arctan(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{4}{45x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.
5. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} = x^{5/6} - \dfrac{1}{3x^{7/6}} + \dfrac{1}{2x^{13/6}} + o\left(\dfrac{1}{x^{13/6}}\right)$.
6. $\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-3x}}}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}} = \mathrm{e}^{-x/6} - \dfrac{\mathrm{e}^{-7x/6}}{3} + \dfrac{13\mathrm{e}^{-13x/6}}{18} + o\left(\mathrm{e}^{-13x/6}\right)$.

Exercice 104. Démontrer les résultats suivants.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(\sqrt{x^2+x}) - \sinh(\sqrt{x^2-x}) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(\cosh(x)) - \cosh(\sinh(x)) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\cosh(\sqrt{x+1}) - \cosh(\sqrt{x})\Big)^{1/x} = \mathrm{e}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x+x)^{\mathrm{e}^x-x^2} - (\mathrm{e}^x+x^2)^{\mathrm{e}^x-x} = -\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\left((x+1)^{1/(x+1)}\right)} - x^{\left(x^{1/x}\right)} = 1$.

Exercice 105. Pour chacune des applications f suivantes, déterminer les asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que la position de la courbe représentative par rapport à ces asymptotes.

1. $f \ : \quad x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.
2. $f \ : \quad x \longmapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.
3. $f \ : \quad x \longmapsto (x+1)\arctan(x)$.
4. $f \ : \quad x \longmapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)}$.
5. $f \ : \quad x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$.
6. $f \ : \quad x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\mathrm{e}^{x/(x+1)}$.
7. $f \ : \quad x \longmapsto x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
8. $f \ : \quad x \longmapsto x^3\arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
9. $f \ : \quad x \longmapsto x\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
10. $f \ : \quad x \longmapsto \sqrt[3]{x^3-2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}$.