Université Grenoble Alpes — **Année 2022-2023**
Licence de mathématiques, 3e année — **Parcours A**

Exercices de calcul différentiel

Table des matières

1 Fonctions différentiables

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vérifier que f est dérivable, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle continue ?

Exercice 2.
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une application dérivable. On suppose que la limite suivante existe :

$$\ell = \lim_{x \to 0+} f'(x) \ .$$

a) Montrer que f se prolonge par continuité à l'origine.
b) Vérifier que f est dérivable à droite à l'origine, et que $f'_+(0) = \ell$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable à l'origine telle que $f(2x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une application linéaire.

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0, et telles que pour tout x réel : $f(2x) = (f(x))^2$.

Exercice 4.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Étant donnés deux points $a, b \in I$ avec $a < b$, on considère les applications $g, h :]a, b[\to \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} , \qquad h(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} , \qquad a < x < b .$$

a) Vérifier que les applications g, h se prolongent par continuité au segment $[a, b]$. Préciser les valeurs de $g(a)$, $h(b)$, et $g(b) - h(a)$.

b) Soit $c \in [f'(a), f'(b)]$ (si $f'(a) \leqslant f'(b)$) ou $c \in [f'(b), f'(a)]$ (si $f'(a) \geqslant f'(b)$). En utilisant la question précédente et le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f'(x) = c$. On remarquera que f' n'est pas supposée continue.

Exercice 5.
Les fonctions $f_i : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous sont-elles prolongeables par continuité à l'origine ?

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} , \qquad f_2(x, y) = \frac{y \sin(xy)}{x^2 + y^2} , \qquad f_3(x, y) = \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4} .$$

Exercice 6.
Les fonctions $g_i : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous sont-elles prolongeables par continuité à l'origine ?

$$g_1(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} , \quad g_2(x, y, z) = \frac{\sin(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} , \quad g_3(x, y, z) = \frac{\log(1+(xy)^2)}{|x|+|y|+z^4} .$$

Exercice 7.

a) Rappeler la définition de la différentiabilité et de la dérivée directionnelle suivant un vecteur.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0, 0)$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ la dérivée directionnelle $\partial_v f(0, 0)$ de f en $(0, 0)$ suivant la direction v existe. Montrer que l'application $v \in \mathbb{R}^2 \to \partial_v f(0, 0)$ n'est pas linéaire. En tirer les conséquences.

c) On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$. Montrer que f est continue, que $\partial_v f(0, 0) = 0$ pour tout $v \in E$, mais que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x, y, z) = (x^2 + 2yz, y^3 - z^3)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer la différentielle de f en tout point de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.

a) Dans un espace vectoriel réel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ on considère l'application $N : x \in E \to \|x\|$. En raisonnant par l'absurde, montrer que N n'est pas différentiable en 0 (on pourra regarder ses dérivées directionnelles).

On suppose désormais que E est un espace pré-hilbertien sur $\mathbb{R}$ et que $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur E.

b) Montrer que $g : x \to \|x\|^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle $\mathrm{d}g$.

c) En déduire que $f : x \to \|x\|$ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$, et calculer sa différentielle $\mathrm{d}f$. Décrire $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x))$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 10.

Soit $E = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des suites réelles absolument sommables et $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(a) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ pour tout $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Calculer la différentielle de f en tout point $a \in E$.

Exercice 11.

Étudier la différentiabilité des applications suivantes définies sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$f : P \to \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\,\mathrm{d}t\,, \qquad g : P \to P' - P^2.$$

2 Différentielles, compléments

Exercice 12.

On se propose de généraliser l'exercice 2 de la feuille de TD1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et a un point de U. Soit $f : U \to F$ une application continue au point a, différentiable sur $U \setminus \{a\}$, et dont la différentielle df admet au point a une limite L dans $\mathcal{L}_c(E, F)$.

(a) Montrer que f est différentiable au point a et que $df(a) = L$. Indication : expliciter les hypothèses et la conclusion cherchée à l'aide des définitions et introduire une fonction de la variable réelle à laquelle on appliquera le théorème des accroissements finis.

(b) Application : montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

est de classe C^1.

(c) Soit $g : U \setminus \{a\} \to F$ une application différentiable et dont la différentielle admet une limite au point a. À l'aide du critère de Cauchy, démontrer que si F est complet et $\dim E > 1$, alors g admet une limite en a (si bien que d'après la question précédente, elle se prolonge en une fonction de classe C^1 en ce point). Comparer ce résultat avec l'exercice 2 de la feuille de TD1.

Exercice 13. dérivée le long d'une courbe

Soit $f : U \subset E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F. Soit $x \in U$, $h \in E$.

(a) Montrer que si f est différentiable en x, alors pour toute courbe $\alpha :]-a, a[\to U$, avec $a > 0$, telle que $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = h$, on a $\partial_h f(x) = (f \circ \alpha)'(0)$.

(b) Le résultat précédent est-il vrai si on suppose seulement que f admet une dérivée directionnelle suivant le vecteur h ?

Exercice 14. dérivée de composées de fonctions

(a) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Justifier que les applications suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles :

   (a) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x, -x)$.

   (b) $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(y, x)$.

   (c) $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x + g(x, y))$.

   (d) $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x^2 + y^2 + z^2)$.

(b) Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x + y) = f(x + f(y))$.

Exercice 15. règle de Leibniz (généralisée aux algèbres de Banach)
Montrer que les applications suivantes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont différentiables et déterminer leurs différentielles en un point de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) $M \mapsto M^2$,

(b) $M \mapsto M^k$, $k \geqslant 3$,

(c) $M \mapsto MAM$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16. dérivées partielles et classe C^1
On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

(a) Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de ces fonctions en un point quelconque de $\mathbb{R}^2$.

(b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, mais non g. Quel est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ où g est de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 17.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

(a) Si f est continûment dérivable, montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$, et de classe C^1 en (x, y) si $x \neq y$.
On suppose dans la suite que f est deux fois dérivable. On veut montrer que g est différentiable sur la diagonale.

(b) Calculer les dérivées partielles de g en un point de la diagonale et en déduire la seule valeur possible de sa différentielle en un tel point.

(c) Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

(d) Si on suppose maintenant que f est de classe C^2, montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18.

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue possédant une dérivée partielle par rapport à sa première variable qui est elle-même une fonction continue sur $I \times J$. Soient encore $a, b : I \to J$ des fonctions dérivables. Montrer que l'application $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt , \qquad x \in I ,$$

est dérivable, et calculer sa dérivée.

Exercice 19.

Soit $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur le segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit également $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continûment dérivable. Montrer que l'application $\Psi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(f) = \int_a^b \varphi(f(x))dx , \qquad f \in E ,$$

est différentiable sur E, et préciser sa différentielle $d\Psi(f)$ au point $f \in E$.

Exercice 20.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients réels. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P(0)P'(1)$ pour tout $P \in E$ est différentiable, et calculer sa différentielle en tout point $P \in E$. Étudier de même les applications g, h définies par

$$g(P) = \int_0^\infty \Big(P(e^{-t}) - P(0)\Big)dt , \qquad h(P) = P\Big(\int_0^1 P(t)^2 dt\Big) .$$

Exercice 21.

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de p et q la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ tel que $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$.

(c) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(d) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle différentiable en $(0, y_0)$?

Exercice 23.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $u \in \mathscr{L}_c(E)$ un endomorphisme continu que l'on suppose symétrique : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$.

(a) Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x)|x\rangle$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

(b) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\langle u(x)|x\rangle}{\langle x|x\rangle}$. Montrer que φ est différentiable. Calculer ensuite $\mathrm{d}\varphi$.

(c) Soit $a \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathrm{d}\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

Exercice 24.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $x = (x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2|$. Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où elle est différentiable.
On se place désormais dans $E = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des suites réelles absolument sommables muni de la norme $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|$.

(b) Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur E il existe une suite bornée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ telle que $L(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i x_i$.

(c) On veut montrer que la norme $F : E \to \mathbb{R}$, $F(x) = \|x\|_1$ n'est différentiable en aucun point de E.
Pour cela

   (a) Montrer en vous inspirant de (a) que s'il existe un i tel que $x_i = 0$, alors F n'est pas différentiable en x.

   (b) Montrer l'aide de (b) que, si F est différentiable en x, $dF(x) \cdot h = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x_i) h_i$.

   (c) Considérons la suite h^n d'éléments de E définie par $h_i^n = 0$ si $i \leqslant n$, $h_i^n = -2x_i$ si $i > n$. Calculer $\|x + h^n\|_1$ et aboutir à une contradiction.

   (d) Conclure.

3 Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 25.

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = (\cos x - \sin y,\ \sin x - \cos y).$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

(a) Montrer que $||dF(x,y)|| \leqslant \sqrt{2}$ pour tout (x,y).

(b) En déduire que la suite récurrente définie par la donnée de x_0, y_0 et, pour $n \geqslant 1$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

converge pour tout (x_0, y_0). Donner l'équation que vérifie sa limite.

Exercice 26.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y,\ x^2 + y^2)$, et $g = f \circ f$.

(a) Montrer que f et g sont de classe C^1.

(b) Calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f, notée $\mathrm{Jac}f(x,y)$. Exprimer $\mathrm{Jac}g(x,y)$ en fonction de $\mathrm{Jac}f(x,y)$.

(c) Calculer $\mathrm{d}g(0,0)$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pout tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$, $||\mathrm{d}g(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$.

(d) Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\bar{B}\big((0,0),\delta\big)$ et le déterminer.

Exercice 27.

Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(x+y) \\ y = \dfrac{1}{2}\cos(x-y) \end{cases}$$

admet au plus une solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 28.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $\Omega \subset E$ un ouvert convexe, et $f : E \to F$ une application, différentiable sur Ω. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad ||df(x)|| \leqslant k\|f(x)\|.$$

Montrer que si f s'annule en un point de Ω alors f est identiquement nulle sur Ω.

(*On pourra commencer par montrer que* $K = \{x \in \Omega \,|\, f(x) = 0\}$ *est un ouvert.*)

Exercice 29.

Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$; que $\mathrm{d}g(x,y)$ est inversible pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$; mais que g n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $g(\mathbb{R}^2)$. Donner un lien entre l'application g et une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 30.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + x^2 \sin \dfrac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$.

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) \neq 0$.

(b) Vérifier que f n'est monotone sur aucun voisinage de l'origine. En déduire qu'il n'existe aucune fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $(g \circ f)(x) = x$ pour tout x dans un voisinage de l'origine.

(c) Cette remarque contredit-elle le théorème d'inversion locale ?

Exercice 31.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 32. On considère l'application Φ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$(x,y,z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image que l'on précisera.

Exercice 33.
Soit $k \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $|f'(t)| \leqslant k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x + f(y),\, y + f(x))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Vérifier que g est difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$. En déduire que son image $g(\mathbb{R}^2)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

(b) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que g est injective.

(c) Montrer que l'ensemble $g(\mathbb{R}^2)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. *Indication :* on pourra considérer une suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(g(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^2$ et montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

(d) En conclure que g est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y\| \geqslant k\|x - y\|$$

où $k > 0$ est une constante.

(a) Montrer que f est de classe C^1 et que sa différentielle est inversible en tout point de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image, et que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert.

(b) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

(c) En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Exercice 35.
On considère le système suivant, d'inconnues $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x^3 & +y^3 & +z^3 & +t^3 & = 0, \\ x^2 & +y^2 & +z^2 & +t^2 & = 2, \\ x & +y & +z & +t & = 0. \end{cases}$$

Montrer que, au voisinage du point $(0,-1,1,0) \in \mathbb{R}^4$, les solutions de (S) forment une courbe régulière $t \mapsto (x(t), y(t), z(t), t)$, et calculer les dérivées $x'(0)$, $y'(0)$, et $z'(0)$.

Exercice 36.
Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(A) = A^2$.

(a) Vérifier que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

(b) Montrer qu'il existe une fonction g de classe C^1 définie dans un voisinage V de la matrice identité I telle que, pour tout $A \in V$, on ait $g(A)^2 = A$.

(c) On suppose que $n = 2$, et on considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $J^2 = I$, mais qu'il n'existe pas de fonction h de classe C^1 définie dans un voisinage V de I telle que $h(I) = J$ et $h(A)^2 = A$ pour tout $A \in V$.

Exercice 37.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$, et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. En quels points peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.

Exercice 38.

Montrer que les équations $x+y-zt = xy-z+t = 0$ définissent au voisinage de $z = 0$, $t = 1$ deux fonctions implicites $x = \phi_1(z, t)$, $y = \phi_2(z, t)$ avec $\phi_1(0, 1) = 1$, dont on calculera les différentielles en ce point.

4 Différentielles d'ordre supérieur

Exercice 39.

Soient Q, T les deux applications de $E = M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même définies par $Q(A) = A^2$ et $T(A) = A^3$ pour tout $A \in E$. Montrer que ces applications sont de classe C^∞ et déterminer les différentielles secondes.

Exercice 40.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to E$ une application de classe C^∞ définie dans un voisinage U du cercle unité $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé E. On pose $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ et $b = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0)$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Montrer que l'application F ainsi définie est de classe C^∞ et calculer $F''(0)$ en fonction de a et de b.

Exercice 41. (*Extrait CC1 mars 2020.*)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ qui à $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ associe l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x) = f(x)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f et F sont de classe C^∞. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et tous $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $F(x)$, $df(x)h$, $dF(x)h$, $d^2f(x)(h, k)$ et $d^2F(x)(h, k)$.

Généralisation.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des applications linéaires continus de E dans E muni de la norme d'opérateur.

Soit $f : \Omega \subset E \to \mathcal{L}(E)$ une application deux fois différentiable définie sur un ouvert Ω de E. On considère l'application $F : E \to E$ définie par $F(x) = f(x)(x)$ pour tout $x \in E$.

2. Montrer que F est différentiable et déterminer $dF(x)h$ pour tout point $x \in \Omega$ et tout $h \in E$. Retrouver le résultat de la première question.
3. Montrer que F est deux fois différentiable et déterminer $d^2F(x)(h,k)$ pour tout point $x \in \Omega$ et tous $h, k \in E$. Retrouver le résultat de la première question.

Exercice 42. (*Extrait CC1 mars 2020.*)
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que $g(0,0) = 0$ et $dg(0,0) = 0$. On considère l'application $F : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,t) = \dfrac{1}{x^2} g(x, tx)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, donner une expression intégrale de F sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et montrer que F se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer la limite de F en $(0,t)$ à l'aide de dérivées partielles de g en $(0,0)$.

Exercice 43.
Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur E telle que $\forall x \in E, f(x) > 0$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|d^2f(x)\| \leqslant M$.

1. Montrer que si $h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\forall x \in E, \quad 0 < f(x) + \lambda df(x) \cdot h + \frac{\lambda^2}{2} M \|h\|^2.$$
Indication : appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f entre deux points bien choisis.
2. En déduire que $\|df(x)\| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}$.

Exercice 44.
Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et soit f une application de E dans E de classe C^2. On suppose que pour tout $x \in E$, la différentielle de f en x est une isométrie.

a) Pour $(h,k) \in E^2$, on note φ la fonction définie par $\varphi(x) = \langle \mathrm{d}f(x)\, h, \mathrm{d}f(x)\, k \rangle$. Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle de deux façons différentes.

On définit $u : E^3 \to \mathbb{R}$ par $u(h,k,l) = \langle \mathrm{d}f(x)\, h, \mathrm{d}^2 f(x)\,(k,l) \rangle$.

2. Montrer que u est symétrique par rapport aux deux dernières variables et antisymétrique par rapport aux deux premières.
3. En déduire que u est nulle. Puis que $\mathrm{d}^2 f(x) = 0$.
4. Conclure.

Exercice 45.
Déterminer les extrema (locaux ou globaux) des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
b) $f(x,y) = x^3 - y^3$;
c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

Exercice 46.
Étudier les extrema globaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^3$:
a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}x^2 + xyz - z + y$;
b) $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$;
c) $f(x,y,z) = x^3 + 3xy^2 + 3z^2 + 3xy$.

Exercice 47.
Déterminer les extrema des fonctions suivantes et préciser leur nature.
a) $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
b) $f(x,y) = \cos x \cos y$ sur $\mathbb{R}^2$.
c) $f(x,y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)$ sur $\mathbb{R}^2$.
d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{a}{xy}$ sur $(\mathbb{R}^*)^2$, en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 48.
Soit $F = (\mathbb{R}_+)^2$ et $f : F \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2 + y^2)\, e^{-x-y}$
1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur F.
2. Déterminer le maximum de f sur F et en déduire que
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 4e^{x+y-2}.$$

Exercice 49.
Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \langle a, x\rangle\, e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}.$$
1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.
2. Montrer que f admet un minimum et un maximum global sur E.
3. Déterminer la différentielle de f.
4. Déterminer les points critiques de f et donner les valeurs maximales et minimales atteintes par f sur E.
5. Calculer $d^2 f$ et déterminer la nature des points critiques de f.

Exercice 50. (*Droite des moindres carrés.*)
On se donne n points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ du plan $\mathbb{R}^2$, tels que deux points au moins aient des abscisses distinctes. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une unique droite $y = ax + b$ telle que la quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ soit minimale.

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(a,b) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \;, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;.$$
Vérifier que f est de classe C^∞, et calculer ses dérivées partielles d'ordre un et deux.
2. Montrer que f est une fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
3. Vérifier que f possède un unique point critique, que l'on notera $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$f(\bar{a} + a, \bar{b} + b) \;=\; f(\bar{a}, \bar{b}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b)^2 \;\geqslant\; f(\bar{a}, \bar{b}) \;.$$

5 Sous-variétés et extrema liés

Exercice 51. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 - 2yz^2 - 1.$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage U de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\varphi(0, 0) = 1$ et

   $$\forall (x, y) \in U, f(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$$

   Calculer $d\varphi(0, 0)$.
2. L'ensemble d'équation $f(x, y, z) = 0$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Si oui, de quelle dimension ?

Exercice 52. Donner l'allure de

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$$

au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 53. Déterminer, parmi les sous-ensembles définis ci-dessous, ceux qui sont des sous- variétés :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$;
2. (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$;
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$;
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0\}$; (paramétrer les points de l'intersection par le coordonnées cylindriques centrées en $(\frac{1}{2}, 0, 0)$).

Exercice 54.

Pour chacune des applications suivantes, déterminer l'ouvert U formé des points au voisinage desquels la fonction est une immersion. L'image de U est-elle une sous-variété de l'espace d'arrivée ?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (\sin(x), \sin(2x))$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto (uv, u + v, u^2 - v^2)$.

Exercice 55. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface d'équation $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$.

1. En remarquant que S est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), représenter graphiquement cette surface.
2. En intersectant S par le plan P d'équation $x + y - z = 0$, on obtient une courbe $C = P \cap S$. Vérifier que $C \neq \emptyset$, et que C est bornée.
3. Au voisinage de quels points de C peut-on paramétrer, de manière C^∞, la courbe C par z ? Autrement dit, pour quels points $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$ peut-on trouver un voisinage U de z_0 dans $\mathbb{R}$ et un voisinage V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que des fonctions φ et ψ définies sur U , de classe C^∞, telles que

   $$\forall M = (x, y, z) \in V \times U,\ M \in C \Leftrightarrow x = \varphi(z) \text{ et } y = \psi(z)?$$

4. Exprimer les dérivées $\varphi'(z)$ et $\psi'(z)$ en fonction de z, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, pour tout $z \in U$. Si
$$h(z) = \varphi(z) - \psi(z),$$
montrer que $h(z)h'(z) = -\frac{1}{2}z$. En déduire une expression de $(h(z))^2$, puis des formules explicites pour φ et ψ.

Exercice 56. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et N une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension q. Montrer que

$$M \times N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, x \in M, y \in N\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ dont on précisera la dimension.

Exercice 57.
Soient $M, N \subset \mathbb{R}^n$ deux sous-variétés de dimension p et q respectivement. On suppose que $p + q \geqslant n$, que $M \cap N \neq \emptyset$, et que

$$\forall a \in M \cap N,\ T_aM + T_aM = \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $M \cap N$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ et donner sa dimension.

Exercice 58.
Soit
$$f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 - 1) \text{ et } g(x, y, z) = 5x + y - 3z.$$
On note $M = f^{-1}(\{0\})$. Montrer par un argument topologique que g admet un maximum global et un minimum global sur M . En déduire les extrema globaux de g sur M .

Exercice 59. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = x^2 - y^2 + 2\ln\frac{y}{x}$. On souhaite étudier le lieu Γ des points où F s'annule.

1. Déterminer le domaine de définition de F ; justifier que l'on peut choisir $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme domaine d'étude.
2. Déterminer les points critiques de F.
3. En étudiant la fonction numérique $f(x) = x^2 - 2\ln x$, montrer que Γ est la réunion de deux graphes de fonctions continues ϕ_1 (croissante) et ϕ_2 (décroissante).
4. Établir les variations de ϕ_2, ses limites.
5. En considérant la fonction $G(x, y) = \dfrac{F(x, y)}{x - y}$, faire une étude locale au point $(1, 1)$. Tracer le graphe de ϕ_2 puis Γ. [Penser à utiliser l'exercice 2 de la feuille 2 !]

Exercice 60. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et Ω l'ensemble des matrices de E inversibles.
1. Montrer que Ω est un ouvert de E.
2. Soit Ψ l'application de $E \times E$ dans E définie par $\Psi(A, B) = AB - I$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $\varphi : A \in \Omega \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de Ω et retrouver sa différentielle.
3. Montrer que φ est un difféomorphisme global de Ω sur Ω.

Exercice 61. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées de taille n, et $I \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice identité. On considère l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(A, \lambda) = \det(A - \lambda I)$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier brièvement le fait que l'application f est de classe C^∞.

(b) Calculer la différentielle de l'application f en tout point $(A, \lambda) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

(c) On note $U \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui possèdent n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \cdots < \lambda_n(A)$. Si $A \in U$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(A, \lambda) \neq 0.$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites, en déduire que toute matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de A possède une seule valeur propre μ dans un voisinage de λ, et que l'application $B \mapsto \mu$ est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de la différentielle de cette application au point A.

(d) Vérifier que l'ensemble U est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 62. Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$ sur l'intersection du plan d'équation $x + z = 1$ avec le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 63. Soit $a, b, c > 0$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ un ellipsoïde. On dit qu'un parallépipède est inscrit dans l'ellipsoïde E si ses sommets sont tous sur E.

Déterminer le volume maximal d'un parallépipède inscrit dans l'ellipsoïde E et la position des sommets d'un parallépipède réalisant ce maximum.

Exercice 64. On considère l'ensemble

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 1\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3\,.$$

(a) Montrer que Σ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera la dimension.

(b) Déterminer l'espace tangent à la sous-variété Σ au point $(2/3, 2/3, -1/3)$.

(c) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y, z) = xyz$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le maximum et le minimum de l'application f restreinte à la sous-variété Σ. En quels points de Σ ces valeurs extrêmes sont-elles atteintes ?

Exercice 65. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels positifs de somme 1, alors

$$\prod_{i=1}^{n} a_i(1 - a_i) \leqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}\,.$$

(Indication : On pourra maximiser la quantité $\sum_{i=1}^{n} \{\ln a_i + \ln(1 - a_i)\}$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.)

6 Équations différentielles

Exercice 66. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $xy' - y = x$ (A)
1. sur $\mathbb{R}_+^*$; 2. sur $\mathbb{R}_-^*$; 3. sur $\mathbb{R}$.

Mêmes questions pour les équations $xy' - 2y = x^3$ (B), $xy''(x) - y'(x) = x^2$ (C).

Il s'agit d'équations linéaires du premier ordre avec second membre non résolues. *On peut donc trouver une expression des solutions sur tout intervalle sur lequel x ne s'annule pas. Les solutions sur $\mathbb{R}$ doivent en particulier être de classe C^1 au voisinage de 0.*

Exercice 67. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + xy = x^3y^3, \ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad (1)$$

1. Montrer que cette équation vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Déterminer la solution maximale vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$ (on pourra considérer la fonction $z = y^{-2}$).
3. Déterminer les solutions globales de (1) et celles qui explosent en temps fini.

Exercice 68. (Cas d'égalité du lemme de Gronwall)
Soient $a, b : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ des fonctions continues. Déterminer les fonctions $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(t) = a(t) + \displaystyle\int_0^t b(s)f(s)\,ds$ pour tout $t \in [0, T]$.
Dans le cas où a est de classe C^1, montrer qu'une telle fonction f est solution d'une équation différentielle, la résoudre et retrouver le résultat précédent.

Exercice 69. (Un lemme de Gronwall différentiel déjà rencontré) Soit $f : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $k > 0$ tels que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$:

$$\|f'(t)\| \leqslant k\|f(t)\|.$$

Montrer que si $f(t_0) = 0$, alors f est l'application nulle.
Indication : ce résultat a été montré dans la feuille d'exercice 3, le retrouver à l'aide du lemme de Gronwall.

Exercice 70. (Lemme de Gronwall différentiel cas général) Soit $f : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $a \geqslant 0$, $b > 0$ tels que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$:

$$\|f'(t)\| \leqslant a + b\|f(t)\|.$$

Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$\|f(t)\| \leqslant \|f(t_0)\|e^{b(t-t_0)} + \frac{a}{b}(e^{b(t-t_0)} - 1).$$

Exercice 71. (Des encadrements) Soient $x, y : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1.

1. Montrer que si $x'(t) < y'(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$ et si $x(t_0) < y(t_0)$, alors $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.
2. On suppose que y est solution d'une équation différentielle :

   $$z' = f(t, z)$$

   où f est une application continue et que x vérifie pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$:

   $$x'(t) < f(t, x(t)).$$

   Montrer que si $x(t_0) < y(t_0)$, alors $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

3. On suppose que x, y sont solutions d'une équation différentielle :

$$z' = f(t, z)$$

où f est une application continue et localement lipschitzienne définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que si $x(t_0) < y(t_0)$, alors $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Exercice 72. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$y'(t) = ty(t) + t^2 y(t)^2 \qquad (1)$$

Montrer que toute solution y de l'équation (1) vérifiant une condition de Cauchy $y(t_0) = y_0 > 0$ explose en temps fini. Indication : on pourra comparer y aux solutions de l'équation $z' = z^2$.

Exercice 73. Trouver toutes les solutions de l'équation

$$y' = x^2 \sin(y^3) + e^{\cos(x)} \ln(1 + y^4)$$

qui s'annulent au moins une fois.

Exercice 74. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 telles que $f'(x) + f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 75. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. On se propose de démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annulent. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

1. Justifier que f est de signe constant. Dans la suite, quitte à changer f en $-f$, on supposera $f > 0$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Justifier que la courbe représentative de f est en-dessous de sa tangente en $(a, f(a))$. En déduire que $f'(a) = 0$. Conclure.

Exercice 76. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$y' = \sin(y), \quad y(0) = y_0. \qquad (*)$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale y et que celle-ci est globale. Montrer en outre que y est de classe C^∞.
2. Déterminer les solutions stationnaires de $y' = \sin(y)$.
3. On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer qu'on a $0 < y(t) < \pi$ pour tout t. Montrer que y admet une limite quand $t \to -\infty$ et quand $t \to +\infty$ et déterminer ces limites.
4. Dans cette question, on appelle f la solution de $(*)$ déterminée par la condition initiale $y_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
   (i) En considérant la fonction $g(t) = \pi - f(-t)$, montrer que le graphe de f admet une symétrie.
   (ii) Montrer que f est concave sur $\mathbb{R}_+$, faire une étude locale de f au voisinage du point $(0, \dfrac{\pi}{2})$, et tracer l'allure du graphe de f.
   (iii) Montrer que f est l'unique fonction à valeurs dans $]0, \pi[$ qui vérifie $\cos(f(t)) = -\operatorname{th}(t)$.

Exercice 77. Trouver toutes les solutions (maximales) de l'équation différentielle $x'(t) = x(t) - x(t)^2$, où $x(t)$ est à valeurs réelles. On précisera leurs domaines de définition et leurs limites aux bornes.

Exercice 78. Soit φ une fonction continue périodique de période $T > 0$ et soit α un complexe. On considère l'équation différentielle

$$(E). \qquad y'(t) + \alpha y(t) = \varphi(t)$$

Montrer que si y est solution de (E), alors $t \mapsto y(t+T)$ est aussi solution.
En déduire que y est une solution périodique de (E) si et seulement si $y(0) = y(T)$.
Montrer que (E) admet des solutions périodiques sauf pour certaines valeurs de α que l'on précisera.

Exercice 79. On considère l'équation différentielle scalaire

$$u'(t) = u(t)^2 \tag{E_c}$$

sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette équation différentielle vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Montrer (soigneusement) que si $u_0 > 0$, la solution maximale de (E_c) vérifiant la condition de Cauchy $u(0) = u_0$ est la fonction $u :]-\infty, \frac{1}{u_0}[\to \mathbb{R}$ définie par $u(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{u_0}}$.
3. Soit $I = [a, b[\subset \mathbb{R}$. Soit $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $u'(t) = g(t, u(t))$. Montrer que si $v : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifie :
$$\begin{cases} v(a) \geqslant u(a) \\ \forall t \in]a, b[, v'(t) \geqslant g(t, v(t)) \end{cases}$$
alors $\forall t \in [a, b[, v(t) \geqslant u(t)$.
4. On considère l'équation différentielle autonome sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ suivante :
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y^2(t) \\ y'(t) = y(t) + 2x^2(t). \end{cases} \tag{E}$$
Soit $(x, y) : J \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale de (E), définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant 0 et vérifiant $(x(0), y(0)) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y > 0\}$. On note $u(t) = x(t) + y(t)$ pour tout $t \in J$.
5. Montrer que $u'(t) \geqslant u^2(t)$ pour tout $t \in J \cap \mathbb{R}_+$.
6. En déduire que J est un intervalle borné à droite, c'est-à-dire de la forme $J =]c, d[, d < +\infty$.

Exercice 80. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 81. On considère l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Etudier la stabilité du point d'équilibre de cette EDO autonome.
2. Déterminer la matrice résolvante de cette EDO linéaire.
3. Déterminer sa solution vérifiant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 82. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x + 2y + 3z + t \\ y'(t) = \qquad y + 2z + 1 \\ z'(t) = \qquad\qquad z + 1 \end{cases} \tag{E}$$

1. Exprimer le système sous la forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$,
   avec $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.
2. Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E) sont-elles définies ?
3. Soit
   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Exprimer A en fonction de I_3, J et J^2.
4. Calculer J^3. En déduire $\exp(tJ)$ et $\exp(tJ^2)$.
5. Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer l'ensemble des solutions $X(t)$ du système (E) sur $\mathbb{R}$.
7. Soit $(x, y, z)(t)$ une solution de (E) avec condition initiale $X(t_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $X(t)$.

Exercice 83. Déterminer la solution du système d'équations différentielles

$$y'(x) \;=\; y(x) + z(x) + x \;, \qquad z'(x) \;=\; -4y(x) - 3z(x) + 2x \;,$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Exercice 84. Soit $F = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et E le sous-espace fermé de $C^2([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions qui s'annulent en 0 et 1, muni de la norme $\|y\|_E = \|y''\|_\infty + \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty$. On se donne deux fonctions h et k réelles continues sur $[0,1]$, et on considère l'application $\phi : E \to F$ définie par $\phi(y) = y'' + hy'^2 + ky^2$.

1. Montrer que l'application : $E \times E \to F$ définie par $\psi(y, z) = h \cdot y' \cdot z' + k \cdot y \cdot z$ est bilinéaire symétrique continue.
2. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur E et calculer la différentielle $d\phi(0)$ de ϕ en 0.
3. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in F$ vérifiant $\|f\|_\infty < \epsilon$, il existe $y \in E$ tel que $\phi(y) = f$.
   Conclure que l'équation différentielle $y'' + h(x)y'^2 + k(x)y^2 = f(x)$ admet une solution qui s'annule en 0 et en 1.

Exercice 85. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + e^{2t} \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + e^{t} \end{cases}$$

1. Déterminer la résolvante de la partie homogène de cette équation.
2. Déterminer à l'aide de la méthode de la variation de la constante la solution de l'équation vérifiant $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.