Université Joseph Fourier - M1 - 2016-2017

Examen session 2

16 mai 2017 - 1h30

De nombreuses questions sont indépendantes au sein du problème.

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Problème. Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u, v, \frac{1}{2}(u^2 + av^2)) \end{aligned}$$

1. **L'application f est-elle injective ?** Oui car $f(u,v) = f(u',v')$ implique $(u,v) = (u',v')$ par les premières coordonnées de f, donc f est injective.
2. **Montrer $(f, \mathbb{R}^2)$ est une surface paramétrée lisse régulière. On pose $S = f(\mathbb{R}^2)$.** Les coordonnées de f sont des polynômes, donc lisses en (u,v), donc f est lisse. On a

$$\begin{aligned} f'_u &= (1, 0, u) \\ f'_v &= (0, 1, av), \end{aligned}$$

   Ces deux vecteurs forment une famille libre par les deux premières coordonnées, donc $(f, \mathbb{R}^2)$ est une surface lisse régulière.
3. On suppose dans cette question que $a = 1$.
   (a) **Représenter l'intersection de S avec un plan affine horizontal (on pourra présenter différents cas).** Si $c < 0$, l'intersection de $\{z = c\}$ avec S est vide car $u^2 + v^2 \geq 0$. Si $z = 0$, $u^2 + v^2 = 0$ ssi $u = 0$ et $v = 0$. Or $(0,0,0) \in \Sigma$, donc $\{z = 0\} \cap S = \{0\}$. Si $c > 0$, $u^2 + v^2 = c$ est un le cercle dans le plan $z = c$ centrée sur $(0,0,c)$ et de rayon $\sqrt{c}$. (dessin).
   (b) **Représenter l'intersection de S avec un plan affine parallèle à (Oxz).** On intersecte $\{y = c\}$ avec S. On a donc $z = x^2 + c^2$ qui est une parabole orientée vers le haut, dans le plan $y = c$. (dessin).
   (c) **Représenter S.** (dessin).
   (d) **Soit D un disque fermée centrée en $(0,0)$, de rayon δ. Calculer l'aire de $f(D)$.** On a $f'_u \wedge f'_v = (-u, -av, 1)$, donc $\|f'_u \wedge f'_v\| = \sqrt{1 + u^2 + a^2v^2}$.
4. Déterminer la matrice de la première forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v). On a $\|f'_u\|^2 = 1 + u^2$, $\|f'_v\| = 1 + a^2v^2$ et $\langle f'_u, f'_v \rangle = auv$. Donc

$$Mat(I_{u,v}, B(f'_u, f'_v)) = \begin{pmatrix} 1+u^2 & auv \\ auv & 1+a^2v^2 \end{pmatrix}$$

5. **(Cours) Montrer que**

$$\forall (k,h) \in (\mathbb{R}^2)^2, \langle dN(u,v)(k), df(u,v)(h)\rangle + \langle N(u,v), d^2f(u,v)(h)(k)\rangle = 0$$

où N est le vecteur normal unitaire associé à (f,U).

6. **Déterminer la matrice de la seconde forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v).** Le vecteur unitaire normal associé à $(f,\mathbb{R}^2)$ est

$$n(u,v) = \frac{(-u,-av,1)}{\sqrt{1+u^2+a^2v^2}}.$$

De plus $f''_{u^2} = (0,0,1)$, $f''_{v^2} = (0,0,a)$, $f''_{uv} = 0$, donc

$$Mat(II_{u,v}, B(f'_u, f'_v)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+a^2v^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

7. **Déterminer la courbure de Gauss K, en fonction des coordonnées (u,v).** On a

$$K = \frac{\det II_p}{\det I_p}$$

avec $p = (u,v)$ et donc

$$K = \frac{a}{1+u^2+a^2v^2}\frac{1}{(1+u^2)(1+a^2v^2) - a^2u^2v^2} = \frac{a}{(1+u^2+a^2v^2)^2}$$

On suppose à partir de maintenant que $a = 1$.

8. **Calculer les courbures principales k_1 et k_2.** Attention : la base (f_u, f'_v) n'est pas orthogonale. La matrice dans cette base de l'endomorphisme de Weingarten est $(I_p)^{-1}II_p$ qui est

$$\frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \end{pmatrix}.$$

Si $k'_i = k_i(1+u^2+v^2)^{3/2}$, On a $k'_1 + k'_2 = (2+u^2+v^2)$ et $k'_1k'_2 = K(1+u^2+v^2)^3 = (1+u^2+v^2)$. Posons $t = 1+u^2+v^2$. On a donc $k'_1(1+t-k'_1) = t$, soit $x^2 - x(1+t) + t = 0$ avec $x = k'_1$. On a donc

$$2k'_1 = (2+u^2+v^2) \pm \sqrt{(1+t)^2 - 4t} = 2+u^2+v^2 \pm (u^2+v^2)$$

donc $k_1 = (1+u^2+v^2)^{-3/2}$ et $k_2 = (1+u^2+v^2)^{-1/2}$.

9. **Pour tout $p \in S$, on désigne par T_pS le plan tangent affine à S en p. Montrer que $T_pS \cap S = \{p\}$.** Une équation du plan est

$$2(x-u)(-u) + 2(y-v)(-v) + 2z - (u^2+v^2) = 0.$$

si $(x,y,z) \in S$, on obtient $-2xu - 2yv + x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0$, soit $(x-u)^2 + (y-v)^2 = 0$, donc $x = u$ et $y = v$, $(x,y,z) = p$.

10. **Soit $A \in \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \forall M \in \mathbb{R}^3, g(M) = \|M - A\|^2$.**
    (a) **Que vaut $\sup_{M\in S} g$?** On a pour $M = (u, v, u^2/2 + v^2/2) \in S$,

    $$g^{1/2}(M) \geq \|M\| - \|A\| \geq \sqrt{(u^2+v^2)} - \|A\| \to_{(u,v)\to\infty} +\infty,$$

    donc le sup est $+\infty$.

(b) **Montrer que la restriction $g_{|S}$ admet un minimum global.** On a vu que $g \to_{M\to\infty} +\infty$, donc il existe $R > 0$, tel que $\|M\| \geq R$ et $M \in S$ implique $g(M) \geq 2g(0)$. Soit $K = \bar{B}(0, R) \cap S$. Comme S est fermé car l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $z - x^2/2 - y^2/2$ et la boule est compacte, K est compact et contient l'origine. L'application $M \in \mathbb{R}^3 \to \|M - A\|^2$ est continue car polynomiale, donc sa restriction à K l'est aussi, et elle atteint sa borne inf en un point $N \in K$. On a $0 \in K$ par définition de R, donc $g(N) \leq g(0)$, si bien que $g_{|\mathbb{R}^3\setminus K} \geq g(N)$, donc N est non seulement un minimum sur K, mais un minimum pour S.