Université Joseph Fourier - M1 - 2018-2019

Examen session 1

14 mai 2019 - 3h00

Les exercices sont indépendants. Aucun document ni outil électronique autorisés.

Exercice 1. Soit

$$C := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^4 + y^2 = 1, x + t = 1 \text{ et } y^2 + z = 1.\}$$

1. Montrer que C est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? Montrer que C est compacte.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z, t) = ax + bt.$$

   Trouver les points critiques de $f_{|C}$. Montrer que ce sont des extrema globaux.

Exercice 2. Soit $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un plan affine et $\gamma : I = [a, b] \to \Pi$ une courbe paramétrée C^2, telle que $\gamma'(t)$ ne s'annule pas pour tout $t \in [a, b]$. Soit $Q \notin \Pi$ et $C \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$C := \bigcup_{M \in \gamma(I)} [Q, M],$$

où pour tout couple (A, B) de points de $\mathbb{R}^3$, $[A, B]$ est le segment de droite entre les deux points.

1. Dessiner rapidement C pour $Q = (0, 0, 1)$ et γ une paramétrisation du cercle unité dans le plan xOy.
2. Montrer qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et une surface paramétrée régulière $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de régularité C^2 telle que $f(U) \subset C$ et $\overline{f(U)} = C$. Montrer qu'on peut choisir f de sorte que f soit affine en la première variable qu'on notera s.

3. Soit $N : U \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ l'application de Gauss associée à la paramétrisation. Que vaut N'_s ?. En déduire la valeur de la courbure K.

4. Exprimer l'aire de C en fonction de la longueur de γ et de la distance de Q à Π. Vérifier votre formule si $\gamma([a, b])$ est un segment de droite.

Exercice 3. Soit M_n l'espace des matrices carrées réelles de taille n, S_n celui des matrices symétriques, et

$$O_n := \{M \in M_n,\ {}^tMM = I_n\},$$

le groupe orthogonal, avec I_n la matrice unité.

1. Soit $\phi : M_n \to S_n$, $\phi(M) := {}^tMM - I_n$.
   (a) Montrer que ϕ est une application lisse, et calculer sa différentielle $d\phi(M)$ en un point $M \in M_n$. Vérifier que pour tout $M \in M_n$, $Im\ d\phi(M) \subset S_n$ et que $\ker d\phi(I_n) = A_n$, où A_n est l'espace des matrices antisymétriques.

   (b) Montrer que pour tout $M \in O_n$, $Im(d\phi(M)) = S_n$.
   (c) Montrer que O_n est une sous-variété lisse de M_n dont on déterminera la dimension.

   (d) Montrer que O_n est compact.

   (e) Montrer que O_n n'est pas connexe. On pourra utiliser l'application déterminant.

2. Soit $f : O_n \to \mathbb{R}$ la restriction de la fonction trace, $f(M) = Tr(M)$. Montrer que $-n \leq f \leq n$. Ces bornes sont-elles atteintes sur O_n ? Ces bornes sont-elles atteintes sur chacune des composantes connexes de O_n ?

Exercice 4. Dans cet exercice, on pourra utiliser le fait suivant admis : il existe une application lisse $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, lisse.
   (a) Déterminer une paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ régulière lisse de son graphe.

   (b) Déterminer l'application de Gauss $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ associée à f en fonction de φ.

   (c) Déterminer la seconde forme fondamentale $II_{(x,y,\varphi(x,y))}$. On pourra fournir sa matrice dans une base associée de façon naturelle à f.
   (d) Déterminer la matrice de la première forme fondamentale dans la base (f'_x, f'_y) et calculer son déterminant.

   (e) En déduire que la courbure de Gauss K est continue en (x, y) et vérifie

   $$|K(x,y)| \leq |\det Hess(\varphi)(x,y)|, \tag{1}$$

   où $Hess(\varphi)$ est la matrice de $d^2\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer de plus que K est du signe de $\det Hess(\varphi)$, et qu'enfin l'inégalité (1) est une égalité aux points critiques de φ.

(f) On suppose que $\varphi(x, y) = \rho(x^2 + y^2)$, avec $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse. Calculer $K(0, 0)$ en fonction de $\rho'(0)$.

2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ lisse, telle que
   — $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\varphi(x, y) > 0$,
   — $\varphi(0, 0) = 0$,
   — la courbure de Gauss du graphe de φ en $(0, 0)$ vaut M.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ une application lisse telle que toutes ses dérivées partielles à tous les ordres tendent vers 0 quand $\|(x, y)\| \to \infty$, ainsi que g elle-même.
   (a) Montrer qu'il existe une telle fonction g.

   (b) Soit Σ le graphe de g, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $K(x, y)$ la courbure de Gauss de Σ au point $(x, y, g(x, y))$. Montrer que
$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} K(x, y) = 0.$$
4. Montrer que pour tout $M > 0$, il existe une application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, telle que, si pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $K(x, y)$ désigne la courbure du graphe de h en $(x, y, h(x, y))$,
   (a) $h(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$;
   (b) $h(0, 0) = 0$;
   (c) $h \to_{\|(x,y)\| \to \infty} 0$;
   (d) $]0, M] \subset K(\mathbb{R}^2)$.