Examen session 1- Corrigé

14 mai 2019 - 3h00

Les exercices sont indépendants. Aucun document ni outil électronique autorisés.

Exercice 1. Soit

$$C := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^4 + y^2 = 1, x + t = 1 \text{ et } y^2 + z = 1.\}$$

1. Montrer que C est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? Montrer que C est compacte.
   Soit $F(M) = (x^4 + y^2 - 1, x + t - 1, y^2 + z - 1)$. F est polynomiale donc lisse, et
   $$dF(M) = (4x^3dx + 2ydy, dx + dt, 2ydy + dz).$$
   On a
   $$(X, Y, Z, T) \in \ker dF(M) \Leftrightarrow 3x^3X + 2yY = 0, X + T = 0 \textbf{ et } 2yY + Z = 0$$
   De plus $(x, y) \neq (0, 0)$ car $(0, 0, *, *) \notin C$ donc
   $$\ker dF(M) = \{(X, Y, -2Y, -X) \mid 3x^3X + 2yY = 0\}$$
   qui est de dimension 1, donc $dF(M)$ est de rang 3 sur $F^{-1}(0) = C$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,
   $$f(x, y, z, t) = ax + bt.$$
   Trouver les points critiques de $f_{|C}$. Montrer que ce sont des extrema globaux.
   Par le théorème des extrema liés, $M \in C$ est critique ssi il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que
   $$adx + bdt = \lambda(4x^3dx + 2ydy) + \mu(dx + dt) + \nu(2ydy + dz),$$
   soit $a = 4\lambda x^3 + \mu, 0 = 2\lambda y + 2\nu y$, $0 = \nu$ et $b = \mu$, donc $a = 4\lambda x^3 + b$, $0 = 2\lambda y$, $\mu = b$ et $\nu = 0$. On a $\lambda \neq 0$ car $a \neq b$, donc $y = 0$, $x = ((a - b)/4\lambda)^{1/3}$ et $y = 0$, soit $((a - b)/4\lambda)^{1/3} = \pm 1$ car $x^4 + y^2 = 1$ et donc $x = \pm 1$, donc $\lambda = \pm(a - b)/4$, $t = 1 - x$ par la seconde équation, $z = 1$ par la dernière. Donc les seuls points critiques possibles sont $(\pm 1, 0, 1, 1 - \pm 1)$ donc $(1, 0, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1, 2)$. Comme S est compact et f continue, celle-ci a au moins deux points critiques en les min et max, donc ce sont ces deux points.

Exercice 2. Soit $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un plan affine et $\gamma : I = [a,b] \to \Pi$ une courbe paramétrée C^2, telle que $\gamma'(t)$ ne s'annule pas pour tout $t \in [a,b]$. Soit $Q \notin \Pi$ et $C \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$C := \bigcup_{M \in \gamma(I)} [Q, M],$$

où pour tout couple (A,B) de points de $\mathbb{R}^3$, $[A,B]$ est le segment de droite entre les deux points.

1. Dessiner rapidement C pour $Q = (0,0,1)$ et γ une paramétrisation du cercle unité dans le plan xOy.
2. Montrer qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et une surface paramétrée régulière $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de régularité C^2 telle que $f(U) \subset C$ et $\overline{f(U)} = C$. Montrer qu'on peut choisir f de sorte que f soit affine en la première variable qu'on notera s.
   Soit $f :]0,1[\times]a,b[\to \mathbb{R}^3$**,**
   $$f(s,t) = Q + s\overrightarrow{\gamma(t)Q}.$$
   On a
   $$f(U) = \bigcup_{M \in \gamma(]a,b[)}]QM[\subset C$$
   et f **s'étend** C^2 **sur** $\bar{U} = [a,b] \times [0,1]$ **avec** $f(\bar{U}) = C$**. Or pour** f **continue,** $C = f(\bar{U}) \subset \overline{f(U)}$**.**
   Enfin, $f'_s = \overrightarrow{\gamma(t)Q}$ **et** $f'_t = s\gamma' \in P$**, où** P **est le plan vectoriel associé à** Π**. On a** $f'_x \wedge f'_t = s\overrightarrow{Q\gamma(t)} \wedge \gamma'(t) \neq 0$ **sans quoi** $\overrightarrow{Q\gamma(t)} \in P$ **donc** $Q \in \Pi$ **ce qui est faux.**
3. Soit $N : U \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ l'application de Gauss associée à la paramétrisation. Que vaut N'_s ?. En déduire la valeur de la courbure K.
   On a
   $$N = \frac{f'_s \wedge f'_t}{\|f'_s \wedge f'_t\|} = \frac{s\overrightarrow{Q\gamma(t)} \wedge \gamma'(t)}{|s|\|\overrightarrow{Q\gamma(t)} \wedge \gamma'(t)\|}$$
   ne dépend pas de s **car** $s > 0$**, donc** N **non plus, donc** $N'_s = 0$**, donc** $f'_s \in \ker W(x,s)$ **et donc** 0 **est courbure principale, donc** $K = 0$**.**
4. Exprimer l'aire de C en fonction de la longueur de γ et de la distance de Q à Π. Vérifier votre formule si $\gamma([a,b])$ est un segment de droite.
   On a, en utilisant $A = proj^{\perp}(Q, \Pi)$**,**
   $$\begin{aligned} Aire(C) &= \int_{[a,b]} \int_{[0,1]} s\|\overrightarrow{Q\gamma(t)} \wedge \gamma'(t)\| ds dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \|QA \vec{\wedge} \gamma'(t)\| dt \\ &= \frac{1}{2}\|QA\| \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \frac{1}{2}\|QA\| Long(\gamma) = \frac{1}{2} dist(Q,\Pi) Long(\gamma). \end{aligned}$$

Si la courbe est un segment, on a affaire à un triangle, et l'aire d'un triangle est bien la moitié de la longueur d'un côté fois la hauteur associée.

Exercice 3. Soit M_n l'espace des matrices carrées réelles de taille n, S_n celui des matrices symétriques, et

$$O_n := \{M \in M_n,\ {}^tMM = I_n\},$$

le groupe orthogonal, avec I_n la matrice unité.

1. Soit $\phi : M_n \to S_n$, $\phi(M) := {}^tMM - I_n$.
   (a) Montrer que ϕ est une application lisse, et calculer sa différentielle $d\phi(M)$ en un point $M \in M_n$. Vérifier que pour tout $M \in M_n$, $Im\ d\phi(M) \subset S_n$ et que $\ker d\phi(I_n) = A_n$, où A_n est l'espace des matrices antisymétriques.
   Les coefficients de ${}^tMM - I_n$ sont quadratiques en les coefficients de M, donc lisses, donc ϕ est lisse. On a $\forall H \in M_n$, $d\phi(M)(H) = {}^tHM + {}^tMH$.
   (b) Montrer que pour tout $M \in O_n$, $Im(d\phi(M)) = S_n$.
   (c) Montrer que O_n est une sous-variété lisse de M_n dont on déterminera la dimension.
   On a $Im(d\phi(M)) \subset S_n$ car ${}^t({}^tHM + {}^tMH) = {}^tHM + {}^tMH$ et si $N \in S_n$,

$$d\phi(M)(\frac{MN}{2}) = \frac{1}{2}({}^tN{}^tMM + {}^tMMN) = N$$

   si $M \in O_n$. Donc $d\phi(M)$ est de rang $\frac{1}{2}(n(n+1))$, donc $\phi^{-1}(0_n) = O_n$ est une sous-variété de M_n de dimension $n^2 - \frac{1}{2}(n(n+1)) = \frac{1}{2}(n(n-1))$.
   (d) Montrer que O_n est compact.
   Comme ϕ est continue, O_n est un fermé de M_n. De plus, $Tr({}^tMM)$ est une norme sur M_n, donc O_n est borné. En dimension finie, les fermés bornés sont compacts.
   (e) Montrer que O_n n'est pas connexe. On pourra utiliser l'application déterminant.
   Pour tout $M \in O_n$, $1 = \det {}^tMM = \det^2 M$, donc $\det M = \pm 1$. De plus $\det$ **est une pplication polynômiale en les coefficients de M, donc continue (même lisse). Enfin**

$$O_n = O_n \cap (\det)^{-1}(\{1\}) \coprod O_n \cap (\det)^{-1}(\{-1\})$$

   donc union disjointe de deux ouverts, non vides car $I_n \in O_n$ et $\det I_n = 1$ **et la matrice diagonale avec $m_{11} = -1$ et le reste 1 s'il en est, est de déterminant -1 tout en étant dans O_n.**
2. Soit $f : O_n \to \mathbb{R}$ la restriction de la fonction trace, $f(M) = Tr(M)$. Montrer que $-n \leq f \leq n$. Ces bornes sont-elles atteintes sur O_n ? Ces bornes sont-elles atteintes sur chacune des composantes connexes de O_n ?

Exercice 4. Dans cet exercie, on pourra utiliser le fait suivant admis : il existe une application lisse $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, lisse.
   (a) Déterminer une paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ régulière lisse de son graphe.
   On peut choisir
   $$f(x,y) = (x, y, \varphi(x,y)).$$
   L'application f est lisse car ses coordonnées sont lisses. De plus $f'_x = (1, 0, \varphi'_x)$ et $f'_y = (0, 1, \varphi'_y)$, donc
   $$f'_x \wedge f'_y = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1) \neq 0,$$
   donc la paramétrisation est lisse.
   (b) Déterminer l'application de Gauss $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ associée à f en fonction de φ.
   On a
   $$N(x,y) = \frac{(-\varphi'_y, \varphi'_x, 1)}{(1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2)^{1/2}},$$
   (c) Déterminer la seconde forme fondamentale $II_{(x,y,\varphi(x,y)}$. On pourra fournir sa matrice dans une base associée de façon naturelle à f.
   La famille $B = (f'_x, f'_y)(x,y)$ est une base de $T_{(x,y,\varphi(x,y))}S$, où S est la graphe de φ, donc la matrice de II dans cette base est
   $$\begin{pmatrix} \langle N, f''_{x^2}\rangle & \langle N, f''_{xy}\rangle \\ \langle N, f''_{xy}\rangle & \langle N, f''_{y^2}\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}} \begin{pmatrix} \varphi''_{x^2} & \varphi''_{xy} \\ \varphi''_{xy} & \varphi''_{y^2} \end{pmatrix}$$
   car $d^2 f = (0, 0, d^2\varphi)$.
   (d) Déterminer la matrice de la première forme fondamentale dans la base (f'_x, f'_y) et calculer son déterminant.
   La matrice est
   $$\begin{pmatrix} 1 + (\varphi'_x)^2 & \varphi'_x\varphi'_y \\ \varphi'_x\varphi'_y & 1 + (\varphi'_y)^2 \end{pmatrix}$$
   son déterminant est $1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2$.
   (e) En déduire que la courbure de Gauss K est continue en (x,y) et vérifie
   $$|K(x,y)| \leq |\det Hess(\varphi)(x,y)|, \qquad (1)$$
   où $Hess(\varphi)$ est la matrice de $d^2\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer de plus que K est du signe de $\det Hess(\varphi)$, et qu'enfin l'inégalité (1) est une égalité aux points critiques de φ.
   (f) On suppose que $\varphi(x,y) = \rho(x^2 + y^2)$, avec $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse. Calculer $K(0,0)$ en fonction de $\rho'(0)$.
   On a
   $$\begin{aligned} \varphi'_x &= \rho'(x^2+y^2)(2x) \\ \varphi'_y &= \rho'(x^2+y^2)(2y) \\ \varphi''_{x^2}(0,0) &= 2\rho'(0) \\ \varphi''_{y^2}(0,0) &= 2\rho'(0) \\ \varphi''_{xy}(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

donc $Mat(I,B)(0,0) = I_2$ **et** $Mat(II,B)(0,0) = \rho'(0)I_2$, **donc**

$$K(0,0) = 4\rho'(0)^2.$$

2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ lisse, telle que
   — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\varphi(x,y) > 0$,
   — $\varphi(0,0) = 0$,
   — la courbure de Gauss du graphe de φ en $(0,0)$ vaut M.

   On choisit $\varphi(x,y) = \frac{\sqrt{M}}{2}(x^2+y^2)$ **qui est lisse car polynomiale. Elle est positive, et d'après ce qui précède,** $K(0,0) = M$ **car** $\rho(t) = \frac{\sqrt{M}}{2}t$**.**
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ une application lisse telle que toutes ses dérivées partielles à tous les ordres tendent vers 0 quand $\|(x,y)\| \to \infty$, ainsi que g elle-même.
   (a) Montrer qu'il existe une telle fonction g.
   On choisit $g(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$**. Par récurrence, on montre que les dérivées partielles de** g **s'écrivent comme un produit d'un polynôme en** x **et** y **et de** g**, donc elles tendent vers** 0 **en l'infini.**
   (b) Soit Σ le graphe de g, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $K(x,y)$ la courbure de Gauss de Σ au point $(x,y,g(x,y))$. Montrer que

   $$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} K(x,y) = 0.$$

   On applique la question 1e à g**. Le déterminant de la hessienne de** g **est polynomial en les dérivées secondes partielles de** g**, donc tend vers 0.**
4. Montrer que pour tout $M > 0$, il existe une application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, telle que, si pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $K(x,y)$ désigne la courbure du graphe de h en $(x,y,h(x,y))$,
   (a) $h(x,y) > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$;
   (b) $h(0,0) = 0$;
   (c) $h \to_{\|(x,y)\| \to \infty} 0$;
   (d) $]0,M] \subset K(\mathbb{R}^2)$.

   Soit $h := \chi(\|(x,y)\|)\varphi + (1-\chi(\|(x,y)\|)g$**. C'est une application lisse, car** χ**,** g **et** φ **sont lisses, car** $\|x,y\|$ **l'est hors** $(0,0)$ **et** χ **est constante près de ce point. De plus** h **est à valeurs strictement positives. Enfin** $h \equiv \varphi$ **au voisinage de l'origine, donc** $K(0,0) = M$**. Comme** $h \equiv g$ **hors de** $B(0,2)$**,** K **tend vers zéro en l'infini. De plus** K **est continue en** (x,y)**, donc par le théorème des valeurs intermdiaires,**

   $$]0,M] =]\lim_{(x,y)\to\infty} K, K(0,0)] \subset K(\mathbb{R}^2).$$