Université Joseph Fourier - M1 - 2017-2018

Géométrie différentielle - Examen session 1

15 mai 2018 - 3 heures

L'exercice ainsi que le problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Dans tout le sujet, pour tout sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ et tout point $p \in \mathbb{R}^n$, on note

$$d(p, M) := \inf_{q \in M} \|\overrightarrow{pq}\|.$$

Question de cours. Soit deux entiers non nuls $p \leq n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction lisse et $M := F^{-1}(0)$.

1. Donner une condition suffisante sur F pour que M soit une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On ne demande pas de démontrer que cette condition est suffisante.
   (a) Cette condition est-elle nécessaire ?
   (b) Donner un exemple de couple (F, M) avec $p = 2 = n$.
   (c) Donner un contre-exemple avec $p = 1$, $n = 2$ et M est non vide, F ne satisfait pas la condition et M n'est pas une sous-variété de dimension 1.
2. Énoncer le théorème des extremas liés pour la restriction d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à la sous-variété M.
3. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^n$ et $p \in M$ tels que $\|\overrightarrow{mp}\| = d(m, M)$, on a $\overrightarrow{mp} \perp T_pM$.

Exercice. Soit

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) &\mapsto (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z), \end{aligned}$$

et $M := F^{-1}(0)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$.

1. Montrer que M est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $g := f_{|M}$ admet un minimum et un maximum.
3. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, déterminer les extrema locaux de g.
4. En déduire $\min g$ et $\max g$.

Problème. Les deux parties sont indépendantes. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{R}^3$ une application C^α avec $\alpha \geq 2$. On suppose que (f, U) est une surface paramétrée régulière. On note $S = f(U)$. Soient les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} N : U & \to & \mathbb{R}^3 \\ w & \mapsto & \dfrac{f'_u \wedge f'_v(w)}{\|f'_u \wedge f'_v(w)\|}, \end{array}$$

où f'_u et f'_v sont les dérivées partielles selon les deux coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$, et

$$\begin{array}{rcl} g : U \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (w,t) & \mapsto & f(w) + tN(w). \end{array}$$

Partie 1

1. Quelle est la régularité de g ?
2. Pour tout $(w, t, h, k) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, déterminer $dg(w,t)(h,k)$. On ne cherchera pas à développer la différentielle de N.
3. Montrer que pour tout $w \in U$, $dg(w, 0)$ est une application linéaire inversible.
4. (a) Montrer que pour tout $w \in U$, il existe $\epsilon > 0$, un voisinage $V \subset U$ de w, un voisinage $W \subset \mathbb{R}^3$ de $p := f(w)$, des applications $C^{\alpha-1}$: $\pi : W \to V$ et $\tau : W \to]-\epsilon, \epsilon[$, tels que
$$\forall m \in W,\ m = g(\pi(m), \tau(m)).$$

   (b) Montrer par le théorème des accroissements finis qu'il existe $\delta_0 > 0$, tel que
$$\forall 0 < \delta < \delta_0,\ diam\Big(f(B(w,\delta))\Big) < \frac{\epsilon}{2}.$$

   (c) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B := B(w, \delta) \subset V$, et tel que si $(w', t') \in B \times \mathbb{R}$ et $(w'', t'') \in B \times]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}[$ satisfont $g(w'', t'') = g(w', t')$, alors $w'' = w'$ et $t' = t''$.
   Dans toute la suite, on pose
$$W' = g\big(B \times]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}[\big) \subset W.$$

5. Pour tout $p \in S$, montrer qu'il existe $r > 0$ telle que pour tout $m \in B_p := B(p, r)$ il existe $p' \in S \cap W'$ tel que $d(m, S) = \|\overrightarrow{p'm}\|$, où $W' \subset \mathbb{R}^3$ est donné par la question 4c. On pourra utiliser la boule fermée $\bar{B}(p, 2r)$.

6. Soit $p \in U$ et B_p la boule définie dans la question 5.
   (a) Montrer que pour tout $m \in B_p$,
$$d(m, S) = \|\overrightarrow{f(\pi(m))m}\| = |\tau(m)|,$$
   où (π, τ) sont définis en question 4a. On pourra utiliser le point $p' \in S$ de la question 5 et noter que par la question de cours, $\overrightarrow{p'm} \perp T_{p'}S$.

(b) En déduire que l'application $m \in B_p \mapsto d(m,S)^2$ est $C^{\alpha-1}$.

7. Soit $w \in U$, $m \in B_p$, $s \in \mathbb{R}$ et
$$m_s := m + sN(w).$$
Montrer que pour s assez petit, $\pi(m_s)$ et $\tau(m_s)$ existent, que $\pi(m_s) = \pi(m)$ et que $\tau(m_s) = \tau(m) + s$.

8. (a) En déduire la valeur de $d\tau(m)(N(\pi(m))$.
   (b) En déduire de la question 6 que $d(\cdot, S)$ n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^3$. Donner un exemple explicite de surface S où ce fait est explicite.

9. Soit $w \in U$, B_p la boule définie à la question 5. Pour tout $\delta > 0$, soit
$$S_\delta := \{m \in B_p, d(m,S) = \delta\}.$$
   (a) Montrer que pour δ assez petit, S_δ est non vide.
   (b) Montrer que pour δ assez petit, S_δ une surface $C^{\alpha-1}$ de W'. On pourra utiliser la question 6.
   (c) **Question Bonus** Montrer que S_δ possède précisément deux composantes connexes $S_\delta^\pm$.

Partie 2

10. Pour tout $\delta > 0$, soit $\Sigma_\delta = g(U \times \{\delta\})$.
   (a) Soit $j : U \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$\forall w \in U, \ j(w) = g(w, \delta).$$
   Montrer que pour tout ouvert d'adhérence compacte $V \subset U$, il existe $\delta > 0$ assez petit, tel que (V, f) est une paramétrisation régulière de Σ_δ, de classe $C^{\alpha-1}$.

   On suppose dans la suite que (f'_u, f'_v) est une paire orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (on admettra qu'il est toujours possible de trouver une telle paramétrisation).
   (b) Montrer que
$$Aire(\Sigma_\delta) = Aire(S) + 2\delta \int_U H(w)dudv + O_{\delta\to 0}(\delta^2),$$
   où $H(w)$ est la moyenne des courbures principales de S en $f(w)$ et $w = (u,v)$.

   (c) Vérifier cette formule lorsque S est une partie de plan, puis lorsque S est la sphère de rayon R. On rappelle que les courbures principales sont $1/R$.