Université Joseph Fourier - M1 - 2017-2018

# Géométrie différentielle - Examen session 1 - Corrigé

15 mai 2018 - 3 heures

**Les exercices ainsi que le problème sont indépendants.** *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

**Aucun document ni outil éléctronique autorisés.**

Dans tout le sujet, pour tout sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ et tout point $p \in \mathbb{R}^n$, on note

$$d(p, M) := \inf_{q \in M} \|\overrightarrow{pq}\|.$$

**Question de cours.** Soit deux entiers non nuls $p \leq n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction lisse et $M := F^{-1}(0)$.

1. Donner une condition suffisante sur $F$ pour que $M$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On ne demande pas de démontrer que cette condition est suffisante.
   (a) Cette condition est-elle nécessaire ?
   (b) Donner un exemple de couple $(F, M)$ avec $p = 2 = n$.
   (c) Donner un contre-exemple avec $p = 1$, $n = 2$ et $M$ est non vide, $F$ ne satisfait pas la condition et $M$ n'est pas une sous-variété de dimension 1.
2. Énoncer le théorème des extremas liés pour la restriction d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à la sous-variété $M$.
3. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^n$ et $p \in M$ tels que $\|\overrightarrow{mp}\| = d(m, M)$, on a $\overrightarrow{mp} \perp T_pM$.

**Exercice.** Soit

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) & \mapsto & (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z), \end{array}$$

et $M := F^{-1}(0)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$.

1. Montrer que $M$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

   **Réponse.** $F$ est lisse et

   $$dF(x, y, z) = (2xdx + 2ydy + 2zdz, dx + dy + dz).$$

   Dans la base canonique duale, c'est $[(2x, 2y, 2z), (1, 1, 1)]$. Cette paire est liée ssi $(x, y, z) \in \mathbb{R}(1, 1, 1)$, soit $\exists t \in \mathbb{R}$, $x = y = z = t$ mais dans ce cas $3t = 0$ car $x+y+z = 0$ et donc $t = 0$ et $(x, y, z) = 0$ ce qui est impossible car $x^2+y^2+z^2 = 1$. Sa dimension est donc $3 - 2 = 1$ (c'est un grand cercle, géométriquement).

2. Montrer que $g := f_{|M}$ admet un minimum et un maximum.

   **Réponse.** L'application $g$ est continue comme restriction d'application linéaire (en dim finie) à $M$. Or $M$ est fermé comme image réciproque par $F$ continue (car polynomiale) de $(0,0)$ qui est fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus $M$ est borne car ses points sont à distance 1 de l'origine. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, $M$ est compact. Donc $g$ atteint ses bornes, et son min et max existent.
3. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, déterminer les extrema locaux de $g$.
4. En déduire $\min g$ et $\max g$.

**Corrigé.** On a

$$dF(x,y,z) = (2xdx + 2ydy + 2zdz, dx + dy + dz)$$

et $df = dz$. Si $a = (x, yz)$ est un extremum local de $g$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$dz = \lambda(xdx + ydy + zdz) + \mu(dx + dy + dz).$$

Comme les $dx_i$ sont libres dans l'espace dual, cette équation est équivalente à

$$\begin{array}{rcl} \lambda x + \mu & = & 0 \\ \lambda y + \mu & = & 0 \\ \lambda z + \mu & = & 1. \end{array}$$

Si $\lambda = 0$, on a $\mu = 0$ et donc $1 = 0$ ce qui est faux. Les deux premières équations donnent $\lambda(x-y) = 0$, avec $\lambda \neq 0$ on a $x = y$, et puisque $a \in M$, $z = -x - y = -2x$, et donc $x^2 + x^2 + 4x^2 = 1$ soit $x^2 = 1/6$, d'où $x = \pm 1/\sqrt{6}$ et $a = a_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. On a au moins deux extrema, donc $a_-$ et $a_+$ sont forcément des extrema, et ce sont les seuls. Comme on a un minimum et un maximum, et que $z_\pm(a_\pm) = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}$, $a_-$ est le max et $a_+$ le min, de hauteur $\mp\sqrt{\frac{2}{3}}$. (On peut obtenir $\lambda$ et $\mu$, mais c'est inutile dans ce cas. )

**Problème. Les deux parties sont indépendantes.** Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{R}^3$ une application $C^\alpha$ avec $\alpha \geq 2$. On suppose que $(f, U)$ est une surface paramétrée régulière. On notera $S = f(U)$. Soit les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} N : U & \to & \mathbb{R}^3 \\ w & \mapsto & \dfrac{f'_u \wedge f'_v(w)}{\|f'_u \wedge f'_v(w)\|}, \end{array}$$

où $f'_u$ et $f'_v$ sont les dérivées partielles selon les deux coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$, et

$$\begin{array}{rcl} g : U \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (w,t) & \mapsto & f(w) + tN(w). \end{array}$$

Partie 1

1. Quelle est la régularité de $g$ ?

2. Pour tout $(w,t,h,k) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, déterminer $dg(w,t)(h,k)$. On ne cherchera pas à développer la différentielle de $N$.

   **Réponse.** On a $dg(w,t) = df(w) + dtN(w) + tdN(w)$, donc
   $$dg(w,t)(h,k) = df(w)(h) + kN(w) + tdN(w)(h).$$

3. Montrer que pour tout $w \in U$, $dg(w,0)$ est une application linéaire inversible.

   **Réponse.** On a $dg(w,0) = df(w) + dtN(w)$, donc $Imdg(w,0) = Imdf(w) + N(w)\mathbb{R}$. Mais $N(w) \perp Imdf(w)$ et $N(w) \neq 0$, donc $Imdg(w,0) = Imdf(w) \oplus N(w)\mathbb{R}$ qui est de dimension 3 car le rang de $df(w)$ est 2.

4. (a) Montrer que pour tout $w \in U$, il existe $\epsilon > 0$, un voisinage $W \subset \mathbb{R}^3$ de $p := f(w)$, un voisinage $V \subset U$ de $w$, des applications $C^{\alpha-1}$ : $\pi : W \to V$ et $\tau : W \to ]-\epsilon, \epsilon[$, tels que
   $$\forall m \in W,\ m = g(\pi(m), \tau(m)).$$

   **Réponse.** $dg(w,0) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est inversible, donc par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $(w,0)$ dans $U \times \mathbb{R}$ et un voisinage ouvert $W$ de $g(w,0) = f(w) = p$ dans $\mathbb{R}^3$, tel que $g_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to W$ est un $C^{\alpha-1}$-difféomorphisme. Une base de voisinages de $(w,0)$ est formée des voisinages produits de la forme $V \times ]-\epsilon, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$, donc en restreignant $W$ éventuellement, on peut supposer que $\mathcal{U} = V \times ]-\epsilon, \epsilon[ \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. On définit $\pi = \pi_1 \circ g^{(-1)}$ et $\tau = \pi_2 \circ g^{(-1)}$ avec $\pi_1$ (resp. $\pi_2$) les projections de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}$). Puisque $g$ est $C^{\alpha-1}$ et ces projections lisses, $\pi$ et $\tau$ sont $C^{\alpha-1}$.

   (b) Montrer par le théorème des accroissements finis qu'il existe $\delta_0 > 0$, tel que
   $$\forall 0 < \delta < \delta_0,\ diam\Big(f(B(w,\delta))\Big) < \frac{\epsilon}{2}.$$

   **Réponse.** On a par le théorème des accroissements finis, pour tout $\delta > 0$,
   $$diam(f(B(w,\delta)) \leq \delta \sup_{x \in \bar{B}(w,\delta)} |||df(x)|||.$$
   Comme $df$ est continue sur $U$, si $\delta_1 > 0$ est tel que $\bar{B}(w,\delta_1) \subset U$, elle est bornée sur $\bar{B}(w,\delta_1)$ par une constante, donc il existe $\delta_0 < \delta_1$ assez petit pour que $diamf(B(w,\delta_0)) < \frac{\epsilon}{2}$.

   (c) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B := B(w,\delta) \subset V$, et tel que si $(w',t') \in B \times \mathbb{R}$ et $(w'',t'') \in B \times ]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}[$ satisfont $g(w'',t'') = g(w',t')$, alors $w'' = w'$ et $t' = t''$.
   **Dans toute la suite, on pose**
   $$W' = g\big(B \times ]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}[\big) \subset W.$$

**Réponse.** Soit $0 < \delta < \delta_0$ assez petit pour que $B(w, \delta) \subset V$. Alors l'hypothèse de la question implique

$$\frac{\epsilon}{2} > \|f(w') - f(w'')\| = \|t'N(w') - t''N(w'')\| \geq |t' - t''|$$

par l'inégalité triangulaire et le fait que $N$ est de norme 1. Donc $t' \in ]-\epsilon, \epsilon[$ et par unicité de $\pi$ et $\nu$, $t' = \tau(m) = t''$ et $w' = \pi(m) = w''$.

5. Pour tout $w \in U$ avec $p = f(w)$, montrer qu'il existe $r > 0$ telle que pour tout $m \in B_p := B(p, r)$ il existe $p' \in S \cap W'$ tel que $d(m, S) = \|m - p'\|$, où

$$d(m, S) = \inf_{q \in S} \|q - m\|$$

et $W' \subset \mathbb{R}^3$ est donné par la question 4c. On pourra utiliser la boule fermée $\bar{B}(p, 2r)$.

**Réponse**. Puisque $W'$ est un voisinage de $p$, il existe $r > 0$ tel que $F := \bar{B}(p, 2r) \subset W'$. Soit $m \in B(p, r)$. On a $\|m - p\| < r$ donc $d(m, S) < r$. De plus $d(m, F^c) > r$, donc $d(m, S \cap F^c) \geq r$, si bien que $\inf_S d(\cdot, m) = \inf_F d(\cdot, m)$. L'application $p \in S \mapsto \|p - m\|$ est continue sur le compact $F \cap S$, donc atteint son minimum en $p' \in F \cap S$, minimum qui est $< r$. C'est un minimum sur $S$ par l'égalité précédente.

6. Soit $p \in U$ et $B_p$ la boule définie dans la question 5.
   (a) Montrer que pour tout $m \in B_p$,

   $$d(m, S) = \|\overrightarrow{f(\pi(m))m}\| = |\tau(m)|,$$

   où $(\pi, \tau)$ sont définis en question 4a. On pourra utiliser le point $p' \in S$ de la question 5 et noter que par la question de cours, $\vec{p'm} \perp T_{p'}S$.
   (b) En déduire que l'application $m \in B_p \mapsto d(m, S)^2$ est $C^{\alpha-1}$.

**Réponse.** Par la question 5, il existe $p' \in S \cap W'$, tel que $d(m, S) = \|m - p'\|$. On a de plus $\overrightarrow{m - p'} \perp T_{p'}S$ par la question de cours. Soit $w' \in B$ tel que $f(w') = p'$. Il existe donc $t' \in \mathbb{R}$,

$$g(\pi(m), \tau(m)) = m = p' + t'N(w') = g(w', t').$$

Par la question 4c, on a en fait $w' = \pi(m)$ et $t' = \tau(m)$, si bien que $d(m, S) = \|m - p'\| = |t'|N(w')| = |\tau(m)|$. $\tau$ est $C^{\alpha-1}$ donc $\tau^2$ aussi, donc $d^2$ aussi.

7. Soit $w \in U$, $m \in B_p$, $s \in \mathbb{R}$ et

$$m_s := m + sN(w).$$

Montrer que pour $s$ assez petit, $\pi(m_s)$ et $\tau(m_s)$ existent, que $\pi(m_s) = \pi(m)$ et que $\tau(m_s) = \tau(m) + s$.

**Réponse.** Comme $B_p$ est ouverte, pour $s$ assez petit, $m' \in B_p$, donc $\pi(m_s \in B$ et $\tau(m_s) \in ]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}[$ existent. On a donc

$$m_s = f(\pi(m_s)) + \tau(m_s)N(\pi(m_s)).$$

Mais par aillerus

$$g(\pi(m), \tau(m) + s) = m + sN(\pi(m)) = m_s,$$

donc par unicité, $\pi(m_s) = \pi(m)$ et $\tau(m_s) = \tau(m) + s$.

**Réponse.** On a

$$\tau(m + sN(\pi(m))) = \tau(m) + s.$$

Donc en dérivant par rapport à $s$ et en faisant $s = 0$, on obtient la dérivée selon $N(\pi(m))$ de $\tau$ en $m$, donc $d\tau(m)(N(\pi(m))) = 1$.

8. (a) En déduire la valeur de $d\tau(m)(N(\pi(m))$.
   (b) En déduire de la question 6 que $d(\cdot, S)$ n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^3$. Donner un exemple explicite de surface $S$ où ce fait est explicite.

   **Réponse.** Soit $p \in S$. On a $d(sN(p), S) = |s|$, donc $d$ n'est pas dérivable dans la direction $N(p)$. Si $S$ est le plan horizontal, $\tau(x, y, z) = z$ donc $d((x, y, z), S) = |z|$ qui n'est pas différentiable pour $z = 0$.

9. Soit $w \in U$, $B_p$ la boule définie à la question 5. Pour tout $\delta > 0$, soit

$$S_\delta := \{m \in B_p, d(m, S) = \delta\}.$$

   (a) Montrer que pour $\delta$ assez petit, $S_\delta$ est non vide.
   (b) Montrer que pour $\delta$ assez petit, $S_\delta$ une surface $C^{\alpha-1}$ de $W'$. On pourra utiliser la question 6.
   (c) **Question Bonus** Montrer que $S_\delta$ possède précisément deux composantes connexes $S_\delta^\pm$.

**Réponse.** Soit $m \in B \setminus S$. Alors $d(m, S) := \rho > 0$. Pour $\delta < \rho$, $S_\delta$ est non vide. En effet, $m + \delta N(\pi(m)) \in B$ et par la question 6,

$$d(m + \delta N(\pi(m)), S) = |\delta|.$$

Soit $F := d(\cdot, S)^2 - \delta^2$ qui est $C^{\alpha-1}$ sur $B$. On a $dF = d(\tau^2) = 2\tau d\tau$ par la question 6. Pour $m \in S_\delta$, $\tau(m) \neq 0$ et par la question précédente, $d\tau(m)$ est non nulle, donc de rang maximal, donc par le cours, $S_\delta \cap B$ est une surface paramétrée (non vide).
On a $\tau : S_\delta \to \{-\delta, \delta\}$. De plus

$$m_\pm := f(\pi(m)) \pm \delta\tau(m) \in S_\delta^\pm := \tau^{-1}(\pm\delta).$$

$\tau$ est continue, donc $S_\delta = S_\delta^+ \cup S_\delta^-$ est la réunion de deux fermés non vides, d'intersection vide, donc $S$ n'est pas connexe. $S^\pm$ est connexe car si $g(w, \delta) \in S^+$ et $g(w', \delta) \in S^+$, $V'$ est connexe donc connexe par arc, donc $w$ et $w'$ sont reliés par $\gamma : [0, 1] \to V'$ un chemin continue, donc $\Gamma := g \circ \gamma$ relie $g(w, \delta)$ et $g(w, \delta)$ dans $S_\delta^+$, donc $S_\delta^+$ est connexe. De même $S_\delta^-$ est connexe.

Partie 2

10. Pour tout $\delta > 0$, soit $\Sigma_\delta = g(U \times \{\delta\})$.

(a) Soit $j : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall w \in U,\ j(w) = g(w, \delta).$$

Montrer que pour tout ouvert d'adhérence compacte $V \subset U$, il existe $\delta > 0$ assez petit, tel que $(V, f)$ est une paramétrisation régulière de $\Sigma_\delta$, de classe $C^{\alpha-1}$.

**Corrigé.** On a $j(w) = g(w, \delta) \in \Sigma_\delta$. On a $dj(w) = df(w) + \delta dN(w)$. La norme de $f'_u \wedge f'_v$ non nulle et continue sur $U$ donc minorée par $c > 0$ sur le compact $\bar{V}$. Donc par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\inf_{\bar{V}} \|j'_u \wedge f'_v\| > c/2 > 0$, donc $j$ est régulière. De plus $j$ est $C^{\alpha-1}$ car $N$ l'est, et $f$ est $C^\alpha$. (il y avait une erreur dans l'énoncé, qui demandait la régularité sur tout $\delta$.)

**On suppose dans la suite que $(f'_u, f'_v)$ est une paire orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (c'est toujours possible de trouver une telle paramétrisation).**

(b) Montrer que

$$Aire(\Sigma_\delta) = Aire(S) + 2\delta \int_U H(w)dudv + O_{\delta\to 0}(\delta^2),$$

où $H(w)$ est la moyenne des courbures principales de $S$ en $f(w)$ et $w = (u, v)$.

**Réponse.** On a

$$Aire(\Sigma_\delta) = \int_U \|j'_u \wedge j'_v\| dudv.$$

De plus, $j'_u \wedge j'_v = f'_u \wedge f'_v + \delta(f'_u \wedge N'_v) + \delta(N'_u \wedge f'_v) + O(\delta^2)$. Donc

$$\|j'_u \wedge j'_v\|^2 = \|f'_u \wedge f'_v\|^2 + 2\delta\langle f'_u \wedge f'_v, f'_u \wedge N'_v + N'_u \wedge f'_v\rangle + O(\delta^2).$$

$N'_u$ et $N'_v$ sont dans $T_pS$, donc en utilisant la BON $(f'_u, f'_v)$, on obtient :

$$2\delta\langle f'_u \wedge f'_v, f'_u \wedge N'_v + N'_u \wedge f'_v\rangle = 2\delta(\langle f'_v, N'_v\rangle + \langle f'_u \wedge N'_u\rangle)$$

qui est $2\delta TrII$ (la trace de la seconde forme fondamentale dans la BON) donc $2(k_1 + k_2) = 4H$. et donc

$$\|j'_u \wedge j'_v\| = \|f'_u \wedge f'_v\|\sqrt{1 + 4\delta H + O(\delta^2)}$$

qui vaut

$$\|f'_u \wedge f'_v\| + 2\delta H + O(\delta^2)$$

(c) Vérifier cette formule lorsque $S$ est une partie de plan, puis lorsque $S$ est la sphère de rayon $R$. On rappelle que les courbures principales sont $1/R$.

**Réponse.** Pour $S$ une partie de plan, le vecteur $N$ est constant, donc $\Sigma_\delta$ est un translaté de $S$, donc de même aire. Mais pour une partie de plan, $H$ est nulle, donc la formule est vraie.

Pour $S = S(0, R)$, $Aire(S) = 4\pi^2 R^2$. $\Sigma_\delta = S(0, R + \delta)$ donc

$$Aire(\Sigma_\delta) = 4\pi^2 (R + \delta)^2 = 4\pi^2 R^2 (1 + 2\delta/R + O(\delta^2).$$

Avec la paramétrisation orthonrmée, l'aire de $U$ est celle de la sphère, donc $\int_U 2H(w)dudv = 4\pi^2 R^2 2/R$, ce qui correspond au résultat général.