Université Joseph Fourier - M1 - 2016-2017

Examen session 1

16 mai 2017 - 3 heures

Les exercices ainsi que le problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Problème 1. Soit

$$\begin{array}{llc} f : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 & \\ (u,v) & \mapsto & (u - \dfrac{u^3}{3} + uv^2, v - \dfrac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2) \end{array}$$

1. **Montrer que f n'est pas injective.** On a $f(0, \pm\sqrt{3}) = (0, 0, -3)$.
2. **Montrer qu'il existe U un voisinage de $(0,0)$, telle que (f, U) est une surface paramétrée lisse régulière et telle que $f_{|U}$ est injective. On pose $S = f(U)$.** Les coordonnées de f sont des polynômes, donc lisses en (u,v), donc f est lisse. On a

$$\begin{array}{rcl} f'_u & = & (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u) \\ f'_v & = & (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v), \end{array}$$

soit $f'_u(0,0) = (1,0,0)$ et $f'_v(0,0) = (0,1,0)$. Comme f' est C^0 et que $f'_u \wedge f'_v(0,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, par continuité il existe un voisinage U' où ce produit vectoriel est non nul, donc (f, U') est une surface lisse régulière. Par le cours, on sait qu'il existe un voisinage $U \subset U'$ de $(0,0)$, tel que $f(U)$ est un graphe au-dessus du plan (Oxy), ce qui implique que $f_{|U}$ est injective.

3. **Montrer que la matrice de la première forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v) est une homothétie qu'on déterminera.** On obtient

$$\langle f'_u, f'_v \rangle = (2uv - 2u^3v + 2uv^3) + (2uv - 2v^3u + 2vu^3) - 4uv = 0,$$

$$\begin{array}{rcl} \|f'_u\|^2 & = & 1 + u^4 + v^4 - 2u^2 + 2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\ & = & 1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2 + 2u^2 + 2v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2. \end{array}$$

Enfin

$$\begin{array}{rcl} \|f'_v\|^2 & = & 4u^2v^2 + 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 - 2v^2 - 2u^2v^2 + 4v^2 \\ & = & 1 + u^4 + v^4 + 2u^2v^2 + 2u^2 + 2v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2. \end{array}$$

La matrice de la première forme fondamentale dans la base (f'_u, f'_v) est $(1 + u^2 + v^2)I_2$.

4. **Soit D un disque fermée centrée en $(0,0)$, de rayon δ, contenu dans U. Calculer l'aire de $f(D)$.** En polaire, on a

$$\begin{aligned} Aire(f(D)) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}(1+r^2)^2 r dr d\theta. \\ &= 2\pi[\frac{1}{6}(1+r^2)^3]_0^{\delta} \\ &= \frac{\pi}{3}((1+\delta^2)^3-1). \end{aligned}$$

5. **Montrer que**

$$\forall (k,h)\in(\mathbb{R}^2)^2, \langle dN(u,v)(k), df(u,v)(h)\rangle + \langle N(u,v), d^2f(u,v)(h)(k)\rangle = 0$$

où N est le vecteur normal unitaire.

6. **Montrer que la matrice de la seconde forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v) est une matrice constante qu'on déterminera. Indication : la question précédente permet de simplifier les calculs.** On

$$\begin{aligned} f'_u\wedge f'_v &= (-4v^2u-2u(1-v^2+u^2), 2v(1-u^2+v^2)+4u^2v, \\ &\quad (1-u^2+v^2)(1+u^2-v^2)-4u^2v^2) \\ &= (-2v^2u-2u(1+u^2), 2v(1+v^2)+2u^2v, 4uv(-u^2+v^2)) \\ &= (-2u(1+u^2+v^2), 2v(1+u^2+v^2), (1-(u^2+v^2))(1+u^2+v^2)) \end{aligned}$$

Comme $f'_u \perp f'_v$,

$$\|f'_u\wedge f'_v\| = \|f'_u\|\|f'_v\| = (1+u^2+v^2)^2.$$

Donc

$$N(u,v) = \frac{1}{(1+u^2+v^2)}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2).$$

On a $f''_{u^2} = (-2u, 2v, 2)$, $f''_{uv} = (2v, 2u, 0)$ et $f''_{v^2} = (2u, -2v, -2)$. La matrice de la seconde forme fondamentale dans la base (f'_u, f'_v) est donc (par la question précédente)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. **Calculer les courbures principales k_1 et k_2, ainsi que la courbure de Gauss K, en fonction des coordonnées (u,v).** La base $(f_u/\|f_u\|, f'_v/\|f'_v\|)$ est orthonormée, et dans cette base, la seconde forme fondamentale est

$$\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc les deux courbures sont $\pm\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$ et la courbure de Gauss est

$$K = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}.$$

8. **Une** *ligne de courbure* **est une courbe C^1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S$ telle que pour tout $t \in I$, $\gamma'(t)$ est direction propre de la seconde forme fondamentale. Quelles sont les lignes de courbures ?** On écrit $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$, avec (u, v) des fonctions dérivables sur I. La condition est que $u'f'_u + v'f'_v$ est parallèle à f'_u ou f'_v, soit $u' = 0$ ou $v' = 0$. Ce sont donc les images des droites horizontales ou verticales par f.

Problème 2. Soit S une surface lisse compacte de $\mathbb{R}^3$ (S est une sous-variété de dimension 2. En particulier, S est localement une surface paramétrée régulière). On veut démontrer qu'il existe au moins un point m de courbure de Gauss strictement positive.

1. **Soit $0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. Montrer qu'il existe un point $m \in S$, tel que $\delta : S \to \mathbb{R}$, $\delta(m) = \|\vec{Om}\|^2$ possède un maximum en m.** L'application $\tilde{\delta} : m \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|\vec{Om}\|^2$ et polynomiale en les coordonnées de m, donc est continue. Sa restriction δ à S compact l'est aussi, donc δ est bornée et atteint son maximum en au moins un point m.
2. **Montrer que $\vec{Om}^{\perp} = T_mS$.** Comme m est un maximum global, il est un max local de δ. Par le théorème des extrema liés, on a
$$T_mS \subset \ker d\tilde{\delta}(m).$$
On a $d\tilde{\delta}(h) = 2\langle \vec{Om}, h\rangle$. Comme $O \notin S$, cette forme linéaire est non nulle, donc son noyau est de dimension $3 - 1$, qui est la dimension de T_mS, donc l'inclusion ci-dessus est une égalité. De plus, $\ker d\tilde{\delta} = (\vec{Om})^{\perp}$, ce qui conclut.
3. **Soit X un vecteur unitaire de T_mS, et $m + P$ le plan affine orthogonal à $m + T_mS$, passant par m et tel que $X \in P$. Montrer que $O \in m + P$.** P est engendré par X un vecteur normal à T_mS, comme $\vec{Om}$, soit $\vec{Om} \in P$, ce qui signifie $O \in m + P$.
4. **Montrer qu'il existe un intervalle non vide $I \subset \mathbb{R}$, ainsi qu'une courbe lisse $\gamma : I \to S$, paramétrée par arc, telle que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = X$. On pourra utiliser une paramétrisation locale de S.** Soit (f, U) une paramétrisation locale de S au voisinage de m, avec $f(0, 0) = m$. Soit $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to U$, $\bar{\gamma}(t) = tdf(0)^{-1}(X)$. Par continuité de $\bar{\gamma}$ et par le fait que U est un voisinage de $(0, 0)$, il existe $\epsilon > 0$, tel que $\bar{\gamma}([-\epsilon, \epsilon]) \subset U$. L'application $\tilde{\gamma} = f \circ \bar{\gamma} : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^3$ est à valeurs dans S et vérifie $\tilde{\gamma}'(0) = X$. Maintenant, on peut paramétriser $\tilde{\gamma}([-\epsilon, \epsilon])$ par arc en $\gamma(s)$, sans changer le sens de parcours. Alors $\gamma'(0) = cX$ avec $c > 0$, donc $c = 1$ puisque $\|X\| = 1$ et $\|\gamma'(s)\| = 1$.
5. **Soit (f, U) une paramétrisation locale de S, telle que $f(0, 0) = m$. En n'utilisant du cours que la définition de la seconde forme fondamentale II_m, montrer que**
$$II_m(X, X) = \langle N(0, 0), \gamma''(0)\rangle,$$
où $N(0, 0)$ le vecteur unitaire normal à S en m associé à (f, U). On a
$$II_m(X, X) = -\langle X, dN(0, 0)(df(0)^{-1}(X)\rangle.$$
Or si comme précédemment $\gamma = f \circ \bar{\gamma}$, on a $\langle N(\bar{\gamma}(s)), \gamma'(s)\rangle = 0$, donc par dérivation
$$\langle dN(\bar{\gamma}(s))(\bar{\gamma}'(s), \gamma'(s)\rangle + \langle N(\bar{\gamma}(s)), \gamma''(s)\rangle = 0.$$

En $s = 0$, cela donne

$$\langle dN(0,0)(df(0,0)^{-1}(X), X\rangle + \langle N(0,0), \gamma''(s)\rangle = 0$$

ce qui est le résultat après usage de la définition de II_m ci-dessus.

6. **Effectuer le développement de Taylor à l'ordre 2 de γ en 0, et en déduire le développement de Taylor à l'ordre 2 de $\delta(\gamma(s))$ en fonction de $\|Om\|$, $II_m(X,X)$ et s.** On a

$$\gamma(s) = m + sX + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + o(s^2),$$

soit

$$\|O\gamma(s)\|^2 = \|Om\|^2 + s^2\|X\|^2 + 2s\langle Om, X\rangle + s^2\langle \gamma''(0), Om\rangle + o(s^2).$$

Le terme linéaire est nul car $Om \perp T_mS$. De plus $Om = \pm N(0,0)\|Om\|$, donc

$$\delta(\gamma(s)) = \|Om\|^2 + s^2(1 \pm II_m(X,X)\|Om\|) + o(s^2).$$

7. **En déduire que l'application $X \in T_mS \mapsto II_m(X,X)$ est de signe constant. Conclure.** Comme m est un maximum de δ, on doit avoir

$$1 \pm II_m(X,X)\|Om\| \leq 0.$$

Si $II_m(X,X)$, qui est continue en $X \in \{X \in T_mS, \|X\| = 1\}$ (car f est C^2), change de signe, elle s'annule en un certain X. Mais alors l'inégalité ci-dessus est contredite. Donc les valeurs propres de II_m sont de mêmes signes, et $K(m) > 0$.

Problème 3. Dans ce problème, on pourra utiliser le fait suivant admis : il existe une application lisse $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1/4$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 1/2$. On notera parfois $(0,0) = 0 \in \mathbb{R}^2$.

1. **Soit $g, h : D((0,0), 3/4) \to \mathbb{R}$ deux applications lisses. Montrer qu'il existe $\psi : D(0,3/4) \to \mathbb{R}$, une application lisse telle que**

$$\begin{aligned}
\psi_{|D(0,1/4)} &= g_{|D(0,1/4)} \\
\psi_{|D(0,3/4)\setminus D(0,1/2)} &= h_{|D(0,3/4)\setminus D(0,1/2)} \\
\psi &\geq \min(0, \min_{D(0,3/4)} h) - \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Définissons

$$\psi(x) = \chi(\|x\|)g(x) + (1 - \chi(\|x\|)h(x).$$

Comme $x \mapsto \|x\|$ est lisse en dehors de $x = 0$, $x \mapsto \chi(\|x\|)$ est lisse sauf en $x = 0$ par composition de fonctions lisses, mais au voisinage de 0 cette fonction est constante, donc lisse. Au total, ψ est lisse comme produit de fonction lisses. De plus elle vérifie les deux premières conditions imposées. Pour la troisième, d'abord $\chi g \geq -\|g\|_\infty$ car $|\chi| \leq 1$. Ensuite si $\min h \leq 0$, alors on peut minorer $(1-\chi)h$ par $\min h$. Si $\min h \geq 0$, on peut minorer par 0, d'où le résultat.

2. **Montrer (par exemple s'inspirant d'un exemple du cours) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $g_\epsilon : D(0, 3/4) \to \mathbb{R}$, telle que le graphe de g_ϵ ait une courbure de Gauss strictement négative en $(0, 0)$, et telle que $\|g_\epsilon\|_\infty \leq C\epsilon$.** Soit $g_\epsilon(x, y) = \epsilon(x^2/2 - y^2/2)$ et $f(x, y) = (x, y, g_\epsilon(x, y))$. On a

$$\begin{aligned} f'_x &= (1, 0, \epsilon x) \\ f'_y &= (0, 1, -\epsilon y), \\ f'_x \wedge f'_y &= (-\epsilon x, \epsilon y, 1), \end{aligned}$$

donc $N(0) = (0, 0, 1)$. De plus $f''_{x^2} = (0, 0, \epsilon)$, $f''_{y^2} = (0, 0, -\epsilon)$ et $f''_{xy} = 0$. Donc la matrice de la seconde forme fondamentale en $(0, 0, 0)$ est diagonale avec pour valeurs propres $-\epsilon$ et ϵ, donc $K(0) = -\epsilon^2 < 0$. De plus, $\|g_\epsilon\|_\infty \leq C\epsilon$, avec

$$C = \|x^2 - y^2_{|D(0,3/4)}\|_\infty.$$

3. **Montrer que l'intersection de la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$ avec $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \bar{D}((0, 0), 3/4), z > 0\}$ est un graphe d'une fonction lisse au-dessus de $\bar{D}((0, 0), 3/4)$.** Sur l'ensemble mentionné la sphère est le graphe de $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, qui est lisse par composition sur $D((0, 0), 3/4)$, car $x^2 + y^2 < 1$ sur cet ensemble, et $r \mapsto \sqrt{r}$ est lisse hors de 0.
4. **En déduire qu'il existe une surface compacte lisse de $\mathbb{R}^3$, formée de la réunion disjointe $S^2 \cap \{(x, y, z), z < \sqrt{7}/4\}$ et d'un graphe au-dessus de $D(0, 3/4)$ possédant au moins un point de courbure de Gauss strictement négative.** Par la première question, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une application ψ_ϵ qui interpole entre h sur $D(0, 3/4) \setminus D(0, 1/2)$ et g_ϵ sur $D(0, 1/4)$. On a $h \geq \sqrt{1 - 9/16} \geq 0$ sur $D(0, 3/4)$, donc par la troisième condition,

$$\psi \geq -C\epsilon.$$

De plus si $(x, y, z) \in S^2 \cap (D(0, 3/4) \times \mathbb{R}^-)$, alors $z < -\sqrt{7}/4$. En prenant $\epsilon = \sqrt{7}/(8C)$, on a que $z > -\sqrt{7}/8$ pour les points du graphe de ψ. En particulier, ce graphe ne touche pas la demi-calotte inférieure.