DS 1

1. Soit $U =]0,1[\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(u,v) = (x,y,z) = (u\cos(v), u\sin(v), v).$$

   a) Faire une esquisse donnant l'allure de $\Sigma = (U,f)$.
   b) Montrer que la paramétrisation $\Sigma = (U,f)$ est régulière.
   c) Calculer l'aire de la surface Σ comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 2\pi$. (Indication : on pourra utiliser le fait que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.)
   d) Calculer, en fonction de $p = (u,v)$ la courbure de Gauss K, la courbure moyenne H et les courbures principales k_1 et k_2 de Σ.
   e) Soit V_p un vecteur unitaire de $T_p\Sigma$, avec $p = f(u,v)$. Montrer qu'il existe $\theta \in]-\pi,\pi[$ tel que

$$V_p = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1+u^2}}\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

   et donner les valeurs de θ pour lesquelles V_p engendre une direction principale de courbure.
   f)

2. Soit $\Sigma = (U,f)$ une surface régulière avec f de classe C^2. On dit qu'un point $p = f(u,v)$ est un *ombilic* si les courbures principales $k_1(p)$ et $k_2(p)$ satisfont $k_1 = k_2$, de sorte que la courbure de Gauss $K(p) = k_1^2$ et la courbure moyenne est $k_1(p)$. On suppose maintenant que tous les points de Σ sont des ombilics.
   a) Démontrer que l'application de Weingarten est diagonale dans toutes les bases du plan tangent.
   b) Démontrer qu'il existe une fonction λ de classe C^1 telle que $n_u = \lambda f_u$ et $n_v = \lambda f_v$, où n est le vecteur normal à Σ.
   c) Dériver les équations $n_u = \lambda f_u$ et $n_v = \lambda f_v$. En déduire que λ est constante.
   d) Montrer que $n = -kf + v$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante et $v \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur constant.
   e) Supposons $k \neq 0$. Montrer que Σ est contenue dans une sphère.
   f) Que se passe-t-il si $k = 0$?

3. Démontrer que l'application de Weingarten est indépendante de la paramétrisation choisie.