Examen de la seconde session

16 juin 2016- 3 heures

Aucun document autorisé.

1. Question de cours.
   (a) Énoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de plusieurs variables.
   (b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1, telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ |||df(x)||| \leq \|x\|^2. \tag{1}$$
   En utilisant directement le TAF, donner une majoration de $|f(x)|$ en fonction de $\|x\|$ et de $|f(0)|$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité obtenue en (1b) n'est pas optimale.
   (d) Donner un exemple non polynomial de fonction f ne satisfaisant pas (1).
   (e) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ possédant des dérivées partielles en la première coordonnée x continues sur $\mathbb{R}^2$, et telle que
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big| \leq y^2.$$
   Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.
      i. Donner un exemple non polynomial d'une telle fonction f.
      ii. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Donner une majoration simple de l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto |f(x,y_0) - f(0,y_0)|$ en fonction de $|x|$ et $|y_0|$.
      iii. Si $f(0,0) = 2$, que vaut $x \mapsto f(x,0)$?

2. Soit
   $$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3y.$$
   (a) $|f|$ est-elle majorée ? Minorée ?
   (b) A-t-on $|f| \underset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} +\infty$?
   (c) Montrez que f est de clase C^1, et déterminez ses points critiques.
   (d) Montrer que l'origine est un extremum local dont on déterminera la nature.
   (e) Montrer qu'aucun des points critiques de f n'est un maximum ou un minimum global.
   (f) L'application $f^{16} + 17f^{20}$ est-elle différenbiable en 0 ? Si oui, que vaut sa différentielle en 0 ?
   (g) On pose : $g(x,y) = \frac{f(x,y)}{x^2+3y^2}$ et $h(x,y) = \frac{f(x,y)}{5|x|+7|y|}$. Ces fonctions peuvent-elles être prolongéees par continuité en $(0,0)$? Si oui, leur prolongement est-il différentiable en $(0,0)$?

3. Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B(t) = (t, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

et (E) le problème différentiel $Y'(t) + AY(t) = B(t)$, $Y \in \mathbb{R}^2$ et $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Déterminer la primitive h de te^{2t} qui s'annule en 0.

   (b) Que peut-on dire des solutions de (E) ?

   (c) Pour $t \in \mathbb{R}$, que vaut $AB(t)$? En déduire sans calcul $\exp(tA)B(t)$.

   (d) Calculer $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (e) En déduire la ou les solutions de (E) en fonction de $\exp(tA)$ et h.

4. Soit $R > 0$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, h(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Montrer que γ est régulière et que la longueur de $\gamma(\mathbb{R})$ entre t et t' est plus grande que $R|t - t'|$. Pour quelle(s) fonction(s) h cette longueur est-telle toujours $2R|t - t'|$?

   (b) Montrer que γ est birégulière et que la courbure $K(t)$ de γ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ K(t) \geq \frac{1}{R\big(1 + (\frac{h'(t)}{R})^2\big)}.$$

   Pour les calculs, on gagnera à utiliser $u_r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $u_\theta = u_r'$ *et* $k = (0, 0, 1)$. *On pourra utiliser par ailleurs la formule* $K(t) = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$.

5. Existe-t-il une courbe de $\mathbb{R}^3$ birégulière et telle que sa projection sur $(0xy)$ n'est pas birégulière ?