Université Joseph Fourier - L3 - Calcul différentiel 2015-2016

Corrigé de l'examen de la seconde session

16 juin 2016- 3 heures

Aucun document autorisé.

1. **Question de cours.**

   (a) **Énoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de plusieurs variables.**

   (b) **Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1, telle que**

   $$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ |||df(x)||| \leq \|x\|^2. \tag{1}$$

   En utilisant directement le TAF, donner une majoration de $|f(x)|$ en fonction de $\|x\|$ et de $|f(0)|$. L'application f est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ qui est un ouvert convexe, donc on peut appliquer le TAF entre 0 et x. On a donc

   $$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &\leq \sup_{y\in[0,x]} \|df(y)\| \|x - 0\| \\ &\leq (\sup_{y\in[0,x]} \|y^2\|)\|x\| \leq \|x\|^3. \end{aligned}$$

   Donc par l'inégalité triangulaire $|f(x)| \leq |f(0)| + \|x\|^3$.

   (c) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité obtenue en (1b) n'est pas optimale.** Soit $f(x) = x_1^3/3$. On a

   $$\|df(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f)^2} = x_1^2$$

   et $|f(x)| - |f(0)| = |x_1|^3/3 \leq \|x\|^3/3 < \|x\|^3$ dès que $\|x\| > 0$.

   (d) **Donner un exemple non polynomial de fonction f ne satisfaisant pas (1).** Toute fonction lisse de différentielle non nulle en 0 convient, par exemple $f(x) = \sin x_1$ vérifie $df(0) = dx_1$ et f n'est pas un polynôme.

   (e) **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ possédant des dérivés partielles en la première coordonnée x continues sur $\mathbb{R}^2$, et telle que**

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq y^2.$$

   Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

   i. **Donner un exemple non polynomial d'une telle fonction f.** Soit $f(x, y) = xy^2 + \cos y$. f n'est pas un polynôme et $\partial_x f = y^2$.

   ii. **Donner une majoration simple de l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto |f(x, y_0) - f(0, y_0)|$ en fonction de $|x|$ et $|y_0|$.** On n'est pas dans les hypothèses du TAF sur $\mathbb{R}^2$. Mais soit $\phi(x) = f(x, y_0)$. On a par le TAF en dimension 1 appliquée à ϕ qui est C^1 sur $\mathbb{R}$ ouvert convexe, $|\phi'(x)| = |\partial_x f(x, y_0)| \leq y_0^2$ donc $|f(x, y_0) - f(0, y_0)| \leq |x - 0|y^2 = |x|y_0^2$.

iii. **Si $f(0,0)=2$, que vaut $x\mapsto f(x,0)$?** Alors par la question précédente, $|\phi(x,0)-2|\le 0$ donc $f(x,0)=2$ pour tout x.

2. **Soit**

$$f(x,y)=x^2+y^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3y.$$

(a) **f est-elle minoré ? majorée ?** On a $f(x,1)=x^2+1+3\frac{\sqrt{3}}{2}x^3\to_{x\to\pm\infty}\pm\infty$ donc f n'est ni minorée, ni majorée.

(b) **A-t-on $|f|\underset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to}+\infty$?** Pour tout $x\neq 0$,

$$f(x,-\frac{2}{3\sqrt{3}x})=x^2+O(x^{-2})-x^2\to_{x\to\infty}0$$

et $(x,-\frac{2}{3\sqrt{3}x})\to_{x\to\infty}\infty$. donc f ne tend pas vers l'infini en l'infini.

(c) **Montrez que f est de clase C^1, et déterminez ses points critiques.** f est un polynôme en (x,y) donc f est lisse, en particulier C^1. On a

$$\begin{aligned}\partial_x f &= 2x+9\sqrt{3}/2x^2y\\ \partial_y f &= 2y+3\sqrt{3}/2x^3.\end{aligned}$$

Si (x,y) est un point critique alors par $\partial_x f=0$ on a $x=0$ ou bien $2+9\sqrt{3}/2xy=0$. Dans le premier cas, par $\partial_y f=0$ on a $y=0$. Dans le second cas, $y=-4/(9\sqrt{3}x)$ et donc $-8/(9\sqrt{3}x)+3\sqrt{3}/2x^3=0$ soit, puisque $x\neq 0$, $x^4=2^4/3^4$ donc $x^2=2^2/3^2$ car $x^2>0$ et enfin $x=\pm 2/3$. Au total, $(0,0)$ est critique, ainsi que les deux points $(\pm 2/3,\mp 2/(3\sqrt{3}))$.

(d) **Montrer que l'origine est un extremum local dont on déterminera la nature.** On a $f(x,y)=\|x,y\|^2+o(\|x,y\|^2)=\|x,y\|^2(1+o(1))$ devient positif pour (x,y) assez petit, donc $f(x,y)\ge 0=f(0,0)$ et $(0,0)$ est un minimum local. (On aurait pu dire aussi que par Taylor et l'unicité du développement, $df(0)(x,y)(x,y)=2x^2+2y^2$ qui est définie positive. Par le cours, 0 est un minimum car 0 est critique.)

(e) **Montrer qu'aucun des points critiques de f n'est un maximum ou un minimum global.** Par la première question, f n'est ni minorée, ni majorée, donc il n'y a ni minimum global, ni maximum global.

(f) **L'application $f^{16}+17f^{20}$ est-elle différenbiable en 0 ? Si oui, que vaut sa différentielle en 0 ?** Cette application est une composée de f et d'un polynôme réel P d'une variable, donc différentiable, de différentielle $dP(f(0))\circ df(0)=0$ car $df(0)=0$ puisque 0 est critique.

(g) **On pose : $g(x,y)=\frac{f(x,y)}{x^2+3y^2}$ et $h(x,y)=\frac{f(x,y)}{5|x|+7|y|}$. Ces fonctions peuvent-elles être prolongées par continuité en $(0,0)$? Si oui, leur prolongement est-il différentiable en $(0,0)$?** On a pour $x\neq 0$, $g(x,0)=x^2/x^2=1\to_{x\to 0}1$ mais pour $y\neq 0$, $g(0,y)=y^2/(3y^2)=1/3\to_{y\to 0}1/3\neq 1$ donc g n'a pas de prolongement par continuité. En revanche, il existe $c>0$ telle que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$3|x|+7|y|\ge 3(|x|+|y|)\ge c\|(x,y)\|$$

car les normes sont équivalentes en dimension finie, donc $h(x,y) \leq (\|x,y\|^2 + o(\|x,y\|^2))/(c\|x,y\|) = O(\|x,y\|) \to_{(x,y)\to 0} 0$, donc on peut prolonger f par 0 en 0. Maintenant, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $h(x,0) - h(0,0) = x^2/(5|x|) = |x|/5$. Si h était différentiable en 0, on aurait donc $|x|/5 = \partial_x f(0)x + o(x,y)$ ce qui implique $\partial_x(0) = \pm 5$, ce qui est une aberration. Donc le prolongement de h n'est pas différentiable en 0.

3. **Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B(t) = (t,t) \in \mathbb{R}^2$,**

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

et (E) le problème différentiel $Y'(t) + AY(t) = B(t)$, $Y \in \mathbb{R}^2$ et $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^2$.

(a) **Déterminer la primitive h de te^{2t} qui s'annule en 0.** On a

$$\int te^{2t}dt = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}\int e^{2t}dt = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + 1/4 := h(t),$$

(b) **Que peut-on dire des solutions de (E) ?** A est définie sur $\mathbb{R}$ est continue car constante, B est continue sur $\mathbb{R}$ car ses coordonnées sont polynomiales, donc par Cauchy-Lipschitz linéaire, les solutions sont définiees sur $\mathbb{R}$ tout entier et le problème avec conditions initiales est unique.

(c) **Si $t \in \mathbb{R}$, que vaut $AB(t)$? En déduire sans calcul $\exp(tA)B(t)$.** On constate que $AB(t) = 2B(t)$. On a donc $\exp(tA) = e^{2t}\ B(t)$.

(d) **Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\exp(tA)$.** On voit que $u = (1,1)$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 2. Comme A est symétrique réelle, elle se diagonalise suivant une base orthogonale. Donc $v = (1,-1)$ est vecteur propre, on constate que la valeur propre associée est 3. On a $i = (u+v)/2$ et $j = (u-v)/2$, donc si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage entre (i,j) et (u,v), alors $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse. Donc $A = Pdiag(2,3)P^{-1}$ et $\exp(tA) = Pdiag(e^{2t}, e^{3t})P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t} + e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix}$.

(e) **Déterminer la ou les solutions de (E) en fonction de $\exp(tA)$ et h.** Les solutions de l'équation homogène sont donc $\exp(-tA)Y_0$ avec $Y_0 \in \mathbb{R}^2$. On cherche les solutions de (E) sous forme $\exp(-tA)C(t)$, avec $t \mapsto C(t) \in \mathbb{R}^2$ C^1. On obtient $C'(t) = \exp(tA)B(t) = e^{2t}B(t) = (te^{2t}, te^{2t})$ par la question ci-dessus. donc $C(t) = Y_0 + (h(t), h(t))$ et

$$Y(t) = \exp(-tA)Y_0 + e^{-2t}h(t)(1,1).$$

4. **Soit $R > 0$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par**

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, h(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) **Montrer que γ est régulière et que la longueur de $\gamma(\mathbb{R})$ entre t et t' est plus grande que $R|t-t'|$. Pour quelle(s) fonction(s) h cette longueur est-telle toujours $2R|t-t'|$?** γ est lisse car ses composantes le sont, et $\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t, h')$ satisfait $\|\gamma'\|^2 = R^2+h'^2 \geq R^2 \neq 0$ donc γ est régulière. De plus $long(t,t') = |\int_t^{t'} \|\gamma'\|(u)du| \geq |\int_t^{t'} Rdu| = R|t-t'|$. Si cette longueur est toujours $2R|t-t'|$, on peut fixer t' et (pour $t > t'$) dériver en t. On obtient $2R = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + h'^2(t)}$ donc $h'^2 = 3R^2$ soit $h' = \sqrt{\pm}R$, soit $h(t) = \pm\sqrt{3}Rt + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) **Montrer que γ est birégulière et que la courbure $K(t)$ de γ vérifie**

$$\forall t \in \mathbb{R},\ K(t) \geq \frac{1}{R\big(1+(\frac{h'(t)}{R})^2\big)}.$$

Pour les calculs, on gagnera à utiliser $u_r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $u_\theta = u_r'$ et $k = (0,0,1)$. On pourra utiliser par ailleurs la formule $K(t) = \frac{\|\gamma'\wedge\gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$. On a $\gamma' = Ru_r(t) + h'(t)k$ donc $\gamma'' = Ru_\theta(t) + h''(t)k$, donc

$$\gamma' \wedge \gamma'' = R^2k - Rh''u_\theta + Rh'u_r,$$

donc

$$\|\gamma' \wedge \gamma''\| = \sqrt{R^4 + R^2h''^2 + R^2h'^2} \geq R(R^2+h'^2)^{1/2}$$

De plus $\|\gamma'\|^3 = (R^2+h'^2)^{3/2}$ donc $K(t) \geq R/\ (R^2+h'^2)$.

5. **Existe-t-il une courbe de $\mathbb{R}^3$ birégulière et telle que sa projection sur $(0xy)$ n'est pas birégulière ?** On prend $\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t)$ est un cercle vertical, parfaitement birégulier, mais sa projection est $f(t)(0, \cos t)$ qui vérifie f' parallèle à f'', donc n'est pas birérgulière.