# Examen de la première session

20 mai 2016- 3 heures

*Aucun document autorisé.*

1. Question de cours.
   (a) Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les équations différentielles vectorielles d'ordre 1.
   (b) Soit l'équation $tY(t)'+(t+1)Y(t) = 0$ avec $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $Y(2) = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
   – Décrire la ou les solutions de cet équation et leur ensemble de définition.
   – On fixe $n = 1$. Résoudre $ty(t)' + (t + 1)y(t) = 1$ avec $y(t_0) = 1$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$
   (a) La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ?
   (b) Soit $(x_0, y_0)$ hors de l'axe des abcisses. La fonction est-elle différentiable en $(x_0, y_0)$ ? Si oui, quelle est sa différentielle ?
   (c) Même question en $(x_0, 0)$ et $x_0 \neq 0$. La différentielle $df$ est-elle continue en $(x_0, 0)$ ?
   (d) Mêmes questions en $(0, 0)$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière lisse paramétrée par une abscisse curviligne $s$, telle que $\gamma$ soit périodique, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$, telle que $\forall s \in \mathbb{R}$, $f(s + T) = f(s)$.
   (a) Montrer que la fonction $\|f\|$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en un point $s_0$. Ce point est-il unique ?
   (b) Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de $f(s)$ au voisinage de $s_0$. On exprimera le résultat en fonction de $(s - s_0)$ et de ses puissances, de $f(s_0)$, de $\tau(s_0)$, $\nu(s_0)$ et $K(s_0)$ (suivant les notations du cours).
   (c) En déduire un développement de Taylor à l'ordre 2 de $\|f\|^2$ au voisinage de $s_0$.
   (d) En déduire que $f(s_0)$ est orthogonale à $\nu(s_0)$, et que $K(s_0) \geq \|f(s_0)\|^{-1}$.
   (e) En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est incluse dans un disque de rayon $r > 0$, il existe au moins un point $f(s_1)$ tel que le rayon de courbure en $f(s_1)$ est plus petit que $r$.

4. (a) Est-il vrai que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe lisse birégulière périodique, son rayon de courbure est majoré ?

(b) Trouver un exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de courbe lisse birégulière, telle que le rayon de courbure n'est pas majoré (*Attention, trouver un exemple signifie démontrer que c'en est bien un).*

5. Soit $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application exponentielle.
   (a) Rappeler la définition de la fonction exp.
   (b) Montrer que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k-2} = O_{A \to 0_n}(1)$.
   (c) En déduire que exp est différentiable en $0_n$, et déterminer $d\exp(0_n)$.
   (d) On admet que exp est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ admet au voisinage $U$ de $0_n$ un inverse $L$ et donner un développement à l'ordre 1 de $L$ au voisinage $V = \exp(U)$ de $\exp(0_n)$.
   (e) Si $B \in V$ est diagonale, que vaut $L(B)$ ?

6. On considère $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ et leurs graphes $P = \{(s, f(s)), s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ et $Q = \{(t, g(t)), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer la distance $N(s,t)$ entre un point de $P$ et un point de $Q$ en fonction de leur abscisse $s$ et $t$ respectivement.
   (b) Caluler les dérivées partielles de $\frac{1}{2}N^2$.
   (c) Calculer $\frac{1}{2}\partial_s(N^2) + \frac{1}{2}\partial_t(N^2)$ ainsi que $g'(t)\frac{1}{2}\partial_s(N^2) + f'(s)\frac{1}{2}\partial_t(N^2)$
   (d) Si $(s,t)$ est un point critique de $N$ avec $f'(s) \neq g'(t)$, que peut-on dire des deux points de $P$ et $Q$ associés ?
   (e) On suppose à partir de maintenant que $f(s) = s-2$ et $g(t) = t^2$. Représenter $P$ et $Q$.
   (f) *Trouver le ou les points critiques de* $N$.
   (g) *Montrer que* $N \underset{(s,t)\to\infty}{\to} +\infty$.
   (h) En déduire sans calcul de Hessienne que le ou les points calculés en (6f) sont des minima. Quelle est la distance minimale entre les deux graphes $P$ et $Q$ ?