Examen de la première session

20 mai 2016- 4 heures

Aucun document autorisé.

1. Question de cours.
   (a) *Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les équations différentielles d'ordre 1.*
   (b) Soit l'équation $tY(t)'+(t+1)Y(t) = 0$ avec $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $Y(2) = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
   – *Décrire la ou les solutions de cet équation et leur ensemble de définition.* L'équation homogène est $Y' + (1 + 1/t)Y = 0$ se résout sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ par CL linéaire, car $1 + 1/t$ y est continue, donc sur $\{t > 0\}$ car $t_0 = 2 > 0$. Si $A(t) = (1 + 1/t)I_n$, on a $Y' + A(t)Y = 0$. On a A diagonale dans la base canonique, donc Il existe $Y_0, Z_0 \in \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{aligned} \forall t > 0,\, Y(t) = \exp\big(-\int_2^t (1 + 1/t)I_n\big)Y_0 &= \exp(-t + 2 - \log|t/2|)Y_0 \\ &= \frac{2}{t}e^2 e^{-t}Y_0. \end{aligned}$$

   – *On fixe $n = 1$. Résoudre $ty(t)'+(t+1)y(t) = 1$ avec $y(t_0) = 1$.* La variation des constantes donne si $y(t) = \lambda(t)e^{-t}/t$, $\lambda' e^{-t}/t = 1/t$ soit $\exists c \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = (e^t + c)e^{-t}/t = (1 + ce^{-t})/t.$$

   Si $y(t_0) = 1$ on a $1/t_0 + ce^{-t_0}/t_0 = 1$ soit $c = e^{t_0}(t_0 - 1)$ et

$$y(t) = 1/t + e^{t_0-t}(t_0 - 1)/t_0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

   (a) *La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?* x/y est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (Ox)$ et sin est continue comme y^2 donc par composition et produit, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (Ox)$. De plus on a

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^2,\, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\, |f(x, y)| \leq y^2 \underset{(x,y)\to(x_0,0)}{\to} 0 = f(x_0, 0),$$

   donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) *Soit (x_0, y_0) hors de l'axe des abcisses. La fonction est-elle différentiable en (x_0, y_0) ? Si oui, quelle est sa différentielle ?* Les arguments ci-dessus sont identiques en remplaccant la continuité par la différentiablilité, donc f est différentiable en $z_0 = (x_0, y_0)$ et

$$df(z_0) = y_0 \cos(x_0/y_0)dx + (2y_0 \sin(x_0/y_0) - x_0 \cos(x_0/y_0))dy.$$

(c) *Même question en $(x_0, 0)$ et $x_0 \neq 0$. La diffrentielle df est-elle continue en $(x_0, 0)$?* On a

$$f(z) - f(x_0, 0) = f(z) = y^2 \sin(x/y) = 0(y^2) = O(\|z\|^2)$$

donc f est bien différentiable en $(x_0, 0)$ de différentielle nulle. Mais $df(z_0)$ n'a pas de limite en $(x_0, 0)$ si $x_0 \neq 0$. En effet, soit $y_n = (2\pi n/x_0)^{-1}$ et $y'_n = (\pi/(2x_0) + 2\pi n/x_0)^{-1}$. Alors $y_n, y'_n \to 0$ et $df(x_0, y_n) \to x_0 dy$ tandis que $df(x_0, y'_n) \to 0$. Donc il n'y a pas de limite si bien que df n'est pas continue en les points de $(Ox)^*$.

(d) *Mêmes questions en $(0, 0)$.* On a de même $df(0) = 0$. Mais cette fois

$$\|df(z)\| \leq |y|\|dx\| + (2|y| + |x|)\|dy\| \to_{z \to 0} 0.$$

donc $df(z) \to_{z \to 0} = df(0)$ et df est continue en 0.

3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière lisse paramétrée par une abscisse curviligne s, telle que γ soit périodique, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$, telle que $\forall s \in \mathbb{R}$, $f(s + T) = f(s)$.*

(a) *Montrer que la fonction $\|f(\cdot)\|$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en un point s_0. Ce point est-il unique ?* On a $\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x)\| = \sup_{x \in [0,T]} \|f(x)\|$ par périodicité. De plus $\|f\|$ est continue car f l'est, donc $\|f\|$ admet un maximum sur le compact $[0, T]$. Le point n'est pas unique puisque $f(s_0 + T) = f(s_0)$.

(b) *Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de $f(s)$ au voisinage de s_0. On exprimera le résultat en fonction de $(s - s_0)$ et de ses puissances, de $f(s_0)$, de $\tau(s_0)$, $\nu(s_0)$ et $K(s_0)$ (suivant les notations du cours).* On a $f(s) = f(s_0) + f'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2} f''(s_0)(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^2$ soit

$$f(s) = f(s_0) + \tau(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2} K(s_0)\nu(s_0)(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^2.$$

(c) *En déduire un développement de Taylor à l'ordre 2 de $\|f\|^2$ au voisinage de s_0.* On a en utisant $\|\nu\| = \|\tau\| = 1$,

$$\begin{aligned}\|f\|^2(s) &= \|f(s_0)\|^2 + 2\langle f(s_0), \tau(s_0)\rangle(s - s_0) + \\ &\quad (s - s_0)^2 + K(s_0)\langle f(s_0), \nu(s_0)\rangle(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^2.\end{aligned}$$

(d) *En déduire que $f(s_0)$ est orthogonale à $\nu(s_0)$, et que $K(s_0) \geq \|f(s_0)\|^{-1}$.* Puisque $\|f(s_0)\|^2$ est maximal pour $\|f\|^2$ qui est dérivable, s_0 est un point critique pour $\|f\|^2$ et la dérivée seconde de $\|f\|^2$ en s_0 est négative (c'était plus simple de traiter les dérivées sans Taylor...). On a donc après identification des coefficients du développement de Taylor : $f(s_0) \perp \tau(s_0)$, et $1 + K(s_0)\langle f(s_0), \nu(s_0)\rangle \leq 0$, si bien que par le premier

$$\langle f(s_0), K(s_0)\nu(s)\rangle = \pm K(s_0)\|f(s_0)\|$$

et donc $1 \pm K(s_0)\|f(s_0)\| \leq 0$ soit, puisque $K > 0$, $\pm = -1$ et $K(s_0) \geq 1/\|f(s_0)\|$.

(e) *En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est incluse dans un disque de rayon $r > 0$, il existe au moins un point $s_1 \in \mathbb{R}$ tel que le rayon de courbure en $f(s_1)$ est plus petit que r.* On peut supposer que l'origine est le centre du disque. En un point s_1 tel que $f(s_1)$ est à distance maximale, on a $K(s_1) \geq 1/\|f(s_1)\| \geq 1/r$ donc $R(s_1) \leq r$.

4. (a) *Est-il vrai que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe lisse birégulière périodique, son rayon de courbure est majoré ?* Oui car $R = 1/\|\tau'(s)\|$ est continue car $\tau = f'$ est lisse et ne s'annule pas. Elle est aussi périodique donc elle admet son sup et son inf sur une période (fermée), donc un max et un min.

   (b) *Trouver un exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de courbe lisse birégulière, telle que le rayon de courbure n'est pas majoré (Attention, trouver un exemple signifie démontrer que c'en est bien un).* Soit $f(t) = (t, e^t, 0)$. On a

$$K(t) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'\|^3} \leq \|f''\|/\|f'\|^2 = e^t/(1 + e^{2t}) \to_{t\to+\infty} 0,$$

   donc $R(t) \to +\infty$.

5. Soit $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application exponentielle.

   (a) *Rappeler la définition de la fonction* exp. On a $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

   (b) *Montrer que $\sum_{k=2} \frac{1}{k!} A^{k-2} = O_{A\to 0_n}(1)$.* Cette somme S vérifie $|||S||| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} |||A|||^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} |||A|||^k \leq e^{|||A|||}$, où $|||A|||$ est la norme d'opérateur. Donc $S = O(1)$.

   (c) *En déduire que* exp *est différentiable en 0_n, et déterminer $d\exp(0_n)$.* On a $\exp(A) = I_n + A + A^2 \sum_{k=2} \frac{1}{k!} A^{k-2} = I_n + A + O_{A\to 0_n}(|||A|||^2)$ par la question précédente, donc exp est différentiable en 0_n et $d\exp(0_n)(A) = A$.

   (d) *On admet que* exp *est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que* $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *admet au voisinage U de 0_n un inverse L et donner un développement à l'ordre 1 de L au voisinage* $\exp(U)$ *de* $\exp(0_n)$. On a $d\exp(0_n) = Id_{M_n(\mathbb{R})}$ qui est inversible, donc par le TIL, il existe un voisinage U de 0_n et un voisinage $V \subset M_n(\mathbb{R})$ de $\exp(0_n) = I_n$ tel que $\exp_{|U} : U \to V$ est un difféomorphisme, donc possède un inverse L. On a $dL(I_n) = (Id)^{-1} = Id$, donc $L(I_n + H) = 0_n + H + O(\|H\|^2)$.

   (e) *Si $B \in V$ est diagonale, que vaut $L(B)$?* On a pour $A = (a_1, \cdots, a_n) \in M_n(\mathbb{R})$ dans U, $\exp(A) = diag(e^{a_1}, \cdots, e^{a_n}) \in V$, donc donc si

$$B = diag(b_1, \cdots, b_n) \in M_n(\mathbb{R}),$$

   $L(B) = diag(\ln(b_1), \cdots, \ln(b_n))$.

6. *On considère $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ et leurs graphes $P = \{(s, f(s)), s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ et $Q = \{(t, g(t)), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.*

   (a) *Calculer la distance $N(s, t)$ entre un point de P et un point de Q en fonction de leur abscisse s et t respectivement. $N(s, t)^2 = (t - s)^2 + (g(t) - f(s))^2$.*

   (b) *Caluler les dérivées partielles de $\frac{1}{2}N^2$.* On a $\frac{1}{2}(N^2)'_s = (s - t) + f'(s)(f(s) - g(t))$. et $\frac{1}{2}(N^2)'_t = (t - s) + g'(t)(g(t) - f(s))$.

   (c) *Calculer $\frac{1}{2}\partial_s(N^2) + \frac{1}{2}\partial_t(N^2)$ ainsi que $g'(t)\frac{1}{2}\partial_s(N^2) + f'(s)\frac{1}{2}\partial_t(N^2)$* On a $\frac{1}{2}\partial_s(N^2) + \frac{1}{2}\partial_t(N^2) = (f(s) - g(t))(f'(s) - g'(t))$. On a $g'(t)\frac{1}{2}\partial_s(N^2) + f'(s)\frac{1}{2}\partial_t(N^2) = (s - t)(g'(t) - f'(s))$.

   (d) *Si (s, t) est un point critique de N avec $f'(s) \neq g'(t)$, que peut-on dire des deux points de P et Q associés ?* Comme $dN^2 = NdN$, les points critiques de N^2 sont points critiques de N. Dans ce cas on a $f(s) = g(t)$ et $s = t$, donc les deux points sont confondus : c'est un point d'intersection des graphes.

(e) *On suppose à partir de maintenant que* $f(s) = s-2$ *et* $g(t) = t^2$*. Représenter* P *et* Q*.*

(f) *Trouver le ou les points critiques de* N*.* D'abord $P \cap Q = \emptyset$ dans ce cas car $(s, s-2) = (t, t^2)$ ssi $t = s$ et $t^2 = t - 2$ soit $t^2 - t + 1 = 0$ est de discriminant $\Delta = -3$ qui n'a pas de racines. Donc les points critiques de N sont les points avec $f'(s) = g'(t)$ soit $1 = 2t$ et $t = 1/2$. On a donc $(s - 1/2) + (s - 2 - 1/4) = 0$ soit $s = 11/8$.

(g) *Montrer que* $N \underset{(s,t)\to\infty}{\to} +\infty$. $N^2(s,t) = (s-t)^2 + (t^2 - s + 2)^2$. Soit $A > 0$. Si $|s-t| > A$ alors $N \geq A$. Sinon, $N \geq |t^2 - s + 2| \geq t^2 - |s| - 2 \geq t^2 - |t| - A - 2$. Pour $|t|$ plus grand que $a > 0$, c'est plus grand que A. Au total, si $|s| + |t| \geq 2a + A$, ou bien $|t| > a$ et alors $N > A$, ou bien $|t| \leq a$ et $|s| \geq A + a$ avec $|t| \leq a$, donc $|s - t| \leq A$ et on a aussi $N > A$.

(h) *En déduire sans calcul de Hessienne que le ou les points calculés en (6f) sont des minima. Quelle est la distance minimale entre les deux graphes* P *et* Q *?* Il existe $R > 0$ tel que $\forall \|(s,t)\| \geq R, N^2(s,t) \geq 2N^2(0,0) = 8$. Sur le compact $D(0,R)$, N^2 est continue donc atteint un min en $z$qui n'est pas sur le cercle car $N^2(z) \leq N^2(0)$. Donc z est un minimum local, donc un point critique qui est donc le point critique $(11/8, 1/2)$. La distance entre les deux graphes est donc $\sqrt{(11/8 - 1/2)^2 + ((11/8) - 2 - 1/4)^2}$.