



Encerclés !

Damien Gayet  
Professeur à l'Institut Fourier

Université de Grenoble

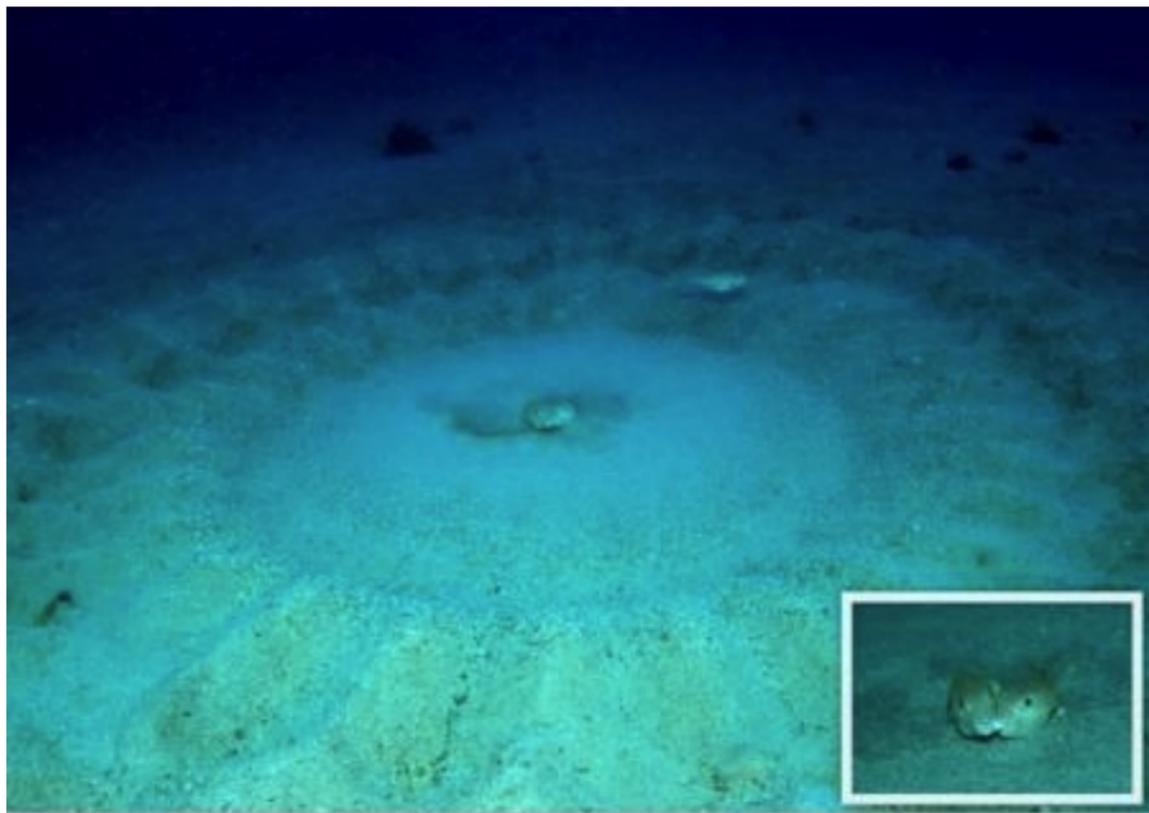
16 mars 2015

# L'artiste



# L'artiste







Partie I  
Encerclés par les cercles



# Les ronds de sorcière



# Les mousses magiques



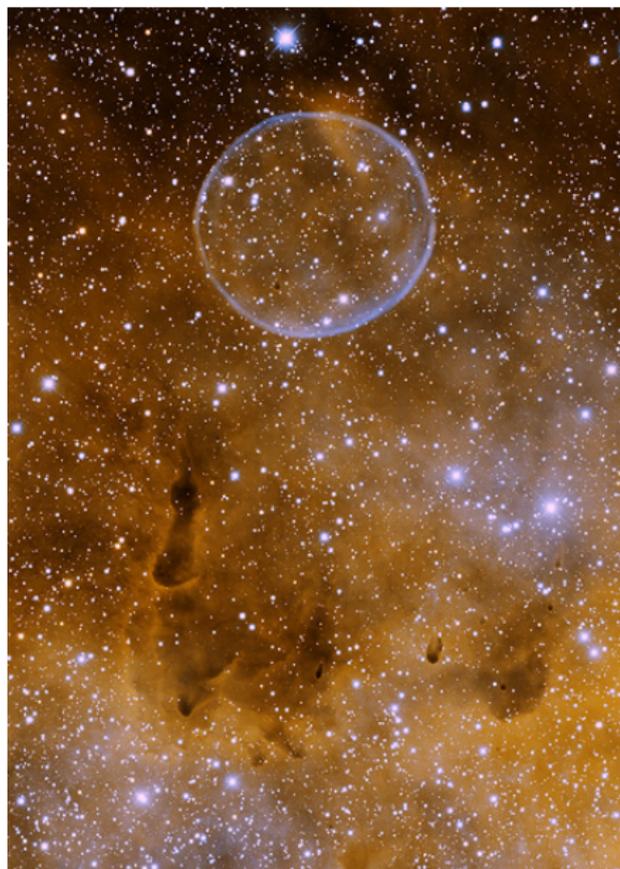
# L'astrolème du Manicouagan







*Evarcha arcuata*

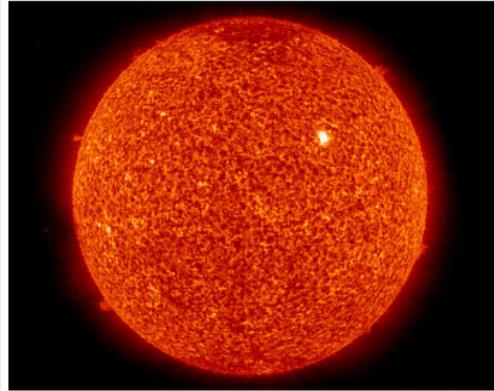






Vidéo *Dauphins*

# Une excellente raison d'aimer le cercle



# La cerise sur le gâteau céleste







Stonehenge (-2800 , -1100)



Les pétroglyphes de Val Camonica (Néolithique)



Un mandala japonais (IXe)

# La Pierre du Soleil (XVe)







Slovénie, 3200 avant notre ère

## Quizz 1

Que font les étoiles pendant la nuit ?

## Quizz 1

Que font les étoiles pendant la nuit ?

1. Elles bougent dans le ciel ?

# Quizz 1

Que font les étoiles pendant la nuit ?

1. Elles bougent dans le ciel ?
2. Elles restent fixes ?

Vidéo *Star Spin*

# Une raison d'adorer les cercles



# Le cercle parfait

*Apprends donc toutes choses,  
Et aussi bien le coeur exempt de tremblement  
Propre à la vérité bellement circulaire,  
Que les opinions des mortels, dans lesquelles  
Il n'est rien qui soit vrai ni digne de crédit*

Parménide (-520 -450 ?) *De la nature*

# Le cercle parfait

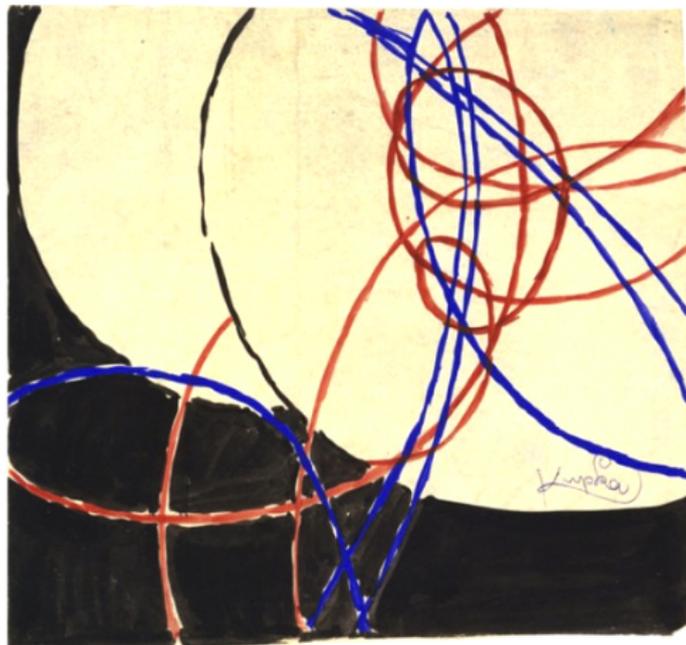
*Apprends donc toutes choses,  
Et aussi bien le coeur exempt de tremblement  
Propre à la vérité bellement circulaire,  
Que les opinions des mortels, dans lesquelles  
Il n'est rien qui soit vrai ni digne de crédit*

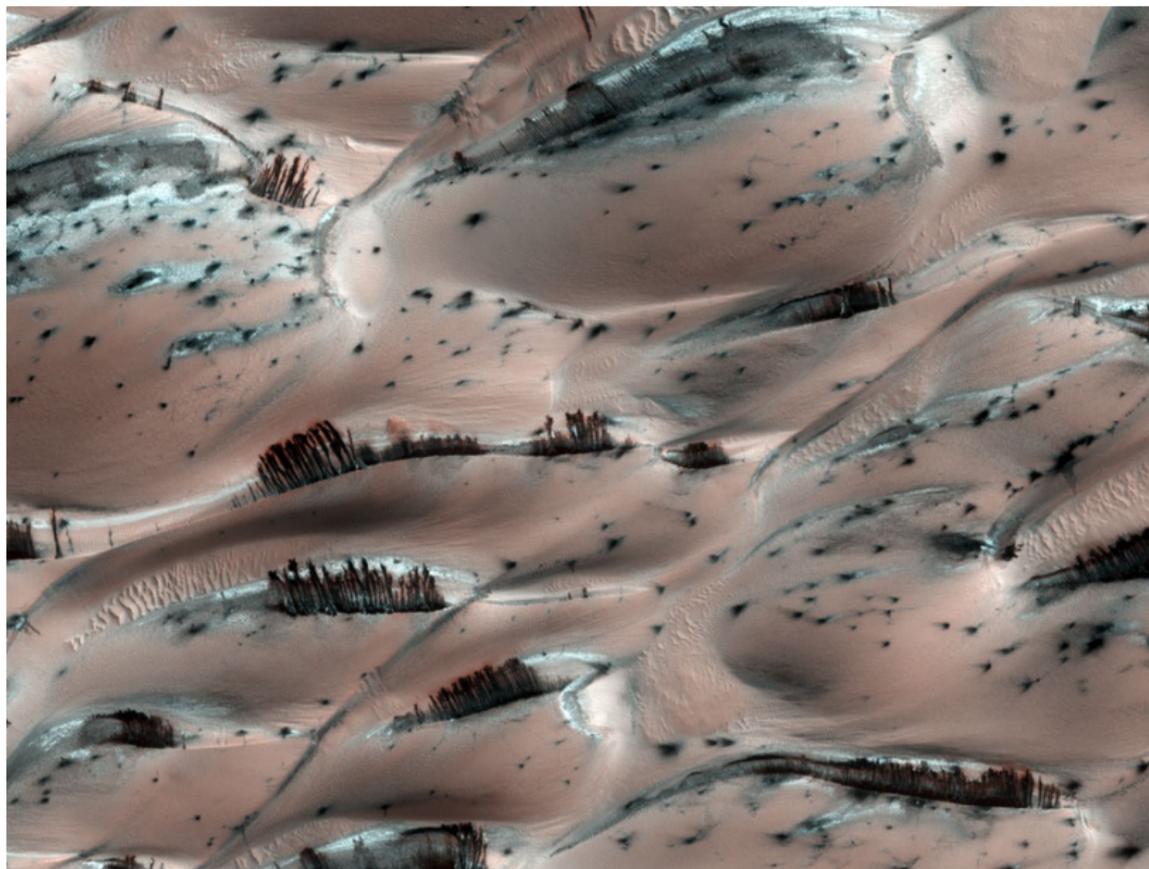
Parménide (-520 -450 ?) *De la nature*

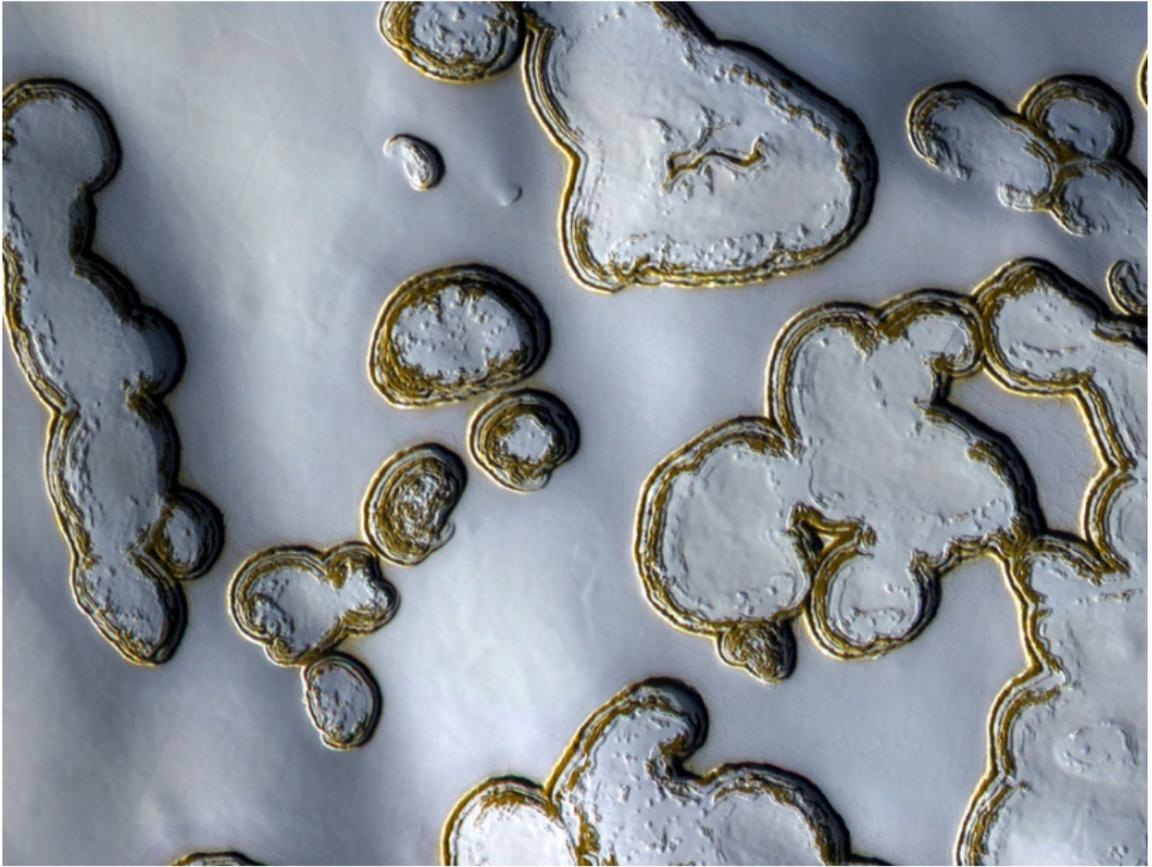
*Ce qui est parfait est antérieur par nature à ce qui est imparfait, or le cercle fait partie des choses parfaites, ce que n'est aucune ligne droite.*

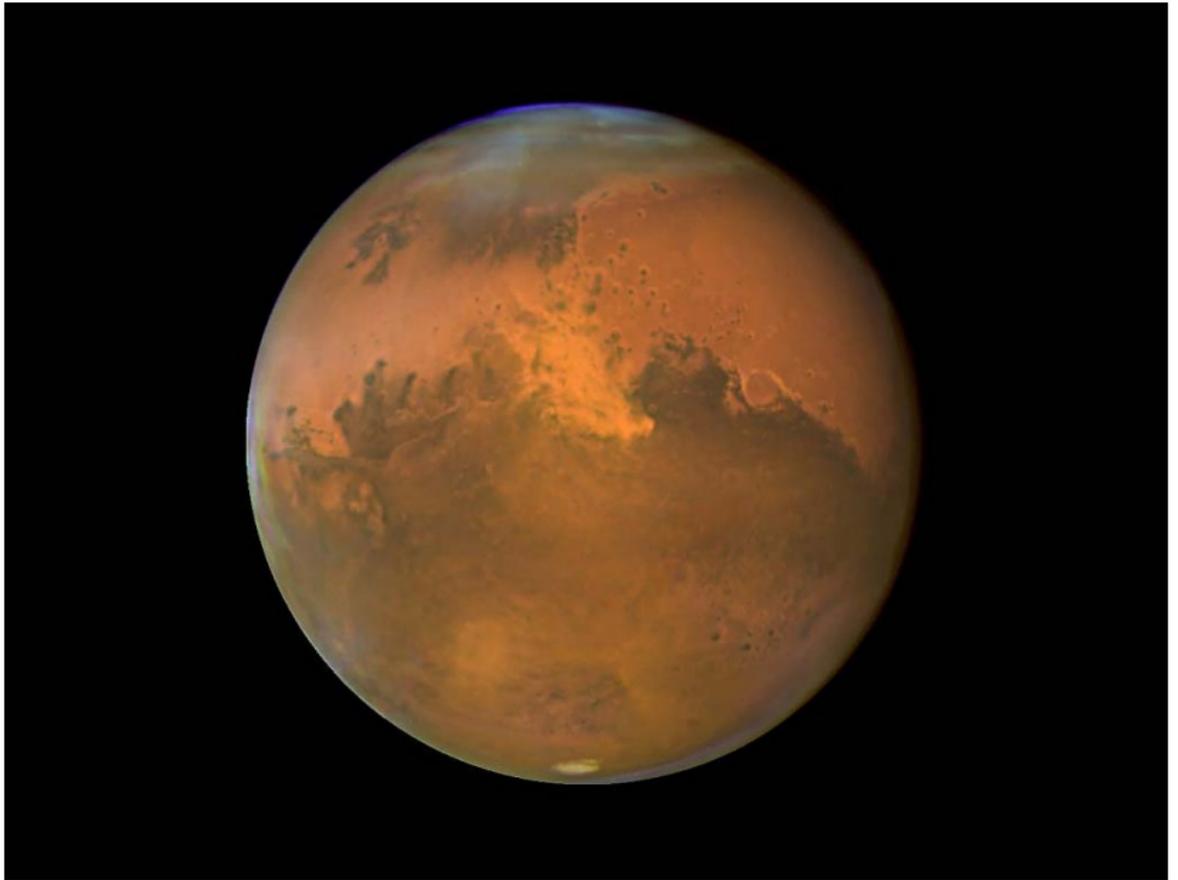
Aristote (-384 -322)  
*Traité du Ciel*

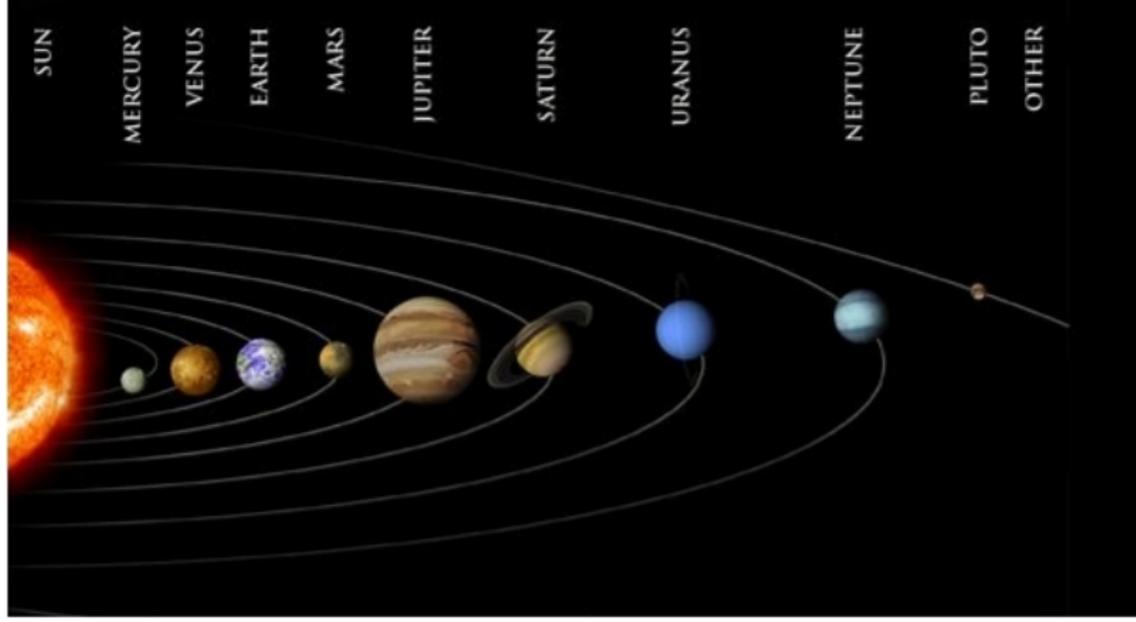
Partie II  
Les cercles cachés de  
Mars, de la mine et du MP3

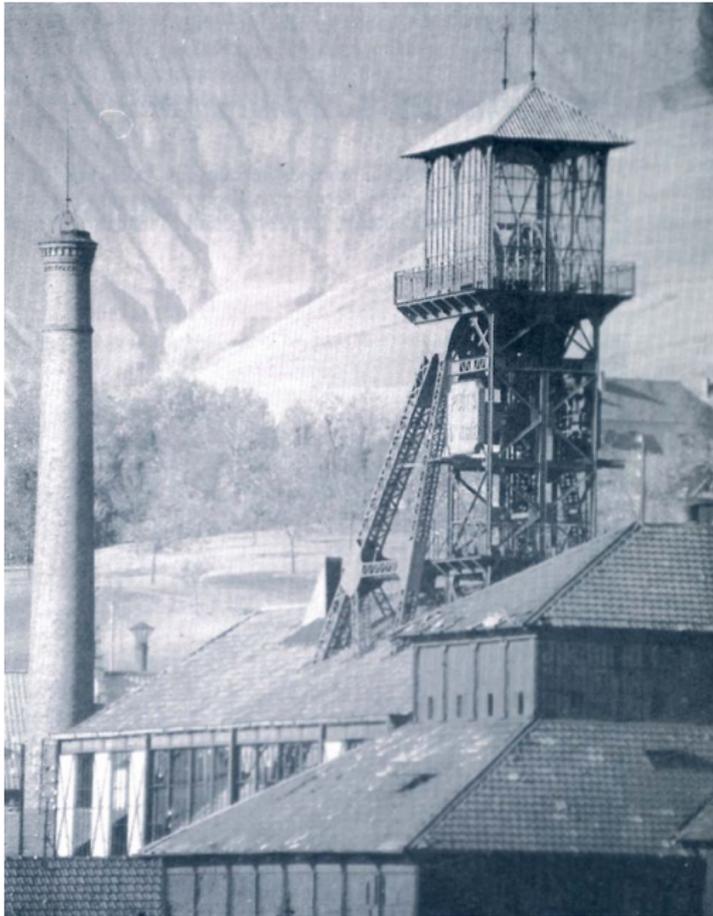














iPod

Music

Photos

Extras

Settings

Shuffle Songs

MENU



## 1. La trajectoire de Mars

1. La trajectoire de Mars
2. La température dans les mines

1. La trajectoire de Mars
2. La température dans les mines
3. La compression des données sonores

## Quizz 2

Après un tour complet de la Terre,

## Quizz 2

Après un tour complet de la Terre,

1. tous les astres sont revenus à leur place.

## Quizz 2

Après un tour complet de la Terre,

1. tous les astres sont revenus à leur place.
2. quelques-uns ont bougé !

Vidéo *Mars*

# Les astres errants

*Empédocle dit que les étoiles fixes sont attachées au cristal, mais que les planètes sont libres.*

*Aétius, Opinions*

# L'énigme des astres errants



# L'explication héliocentrique

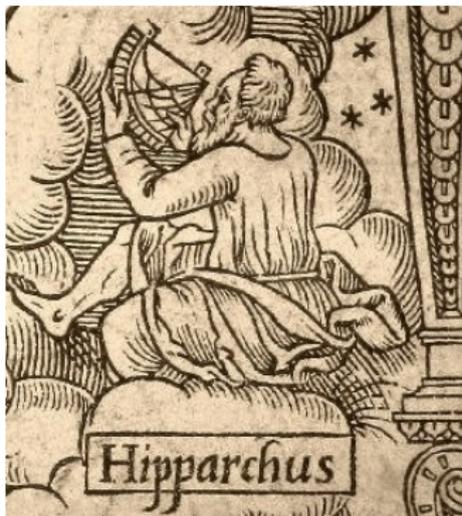
Vidéo *Mars*

# L'analemme solaire

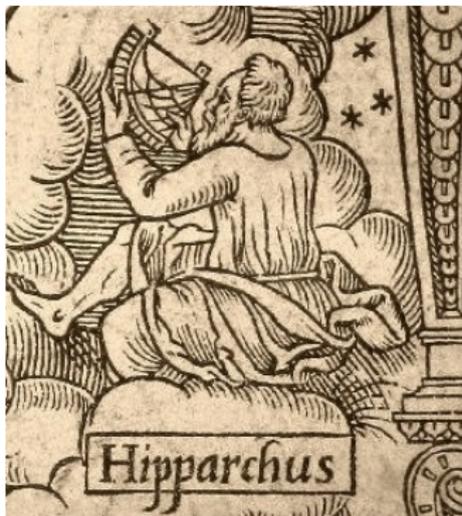
# L'analemme solaire



## Les stars nomades des astres errants



## Les stars nomades des astres errants



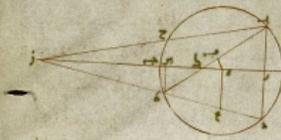
*Hipparque (-190 -120) et Ptolémée (90-169)*

## Pensée circulaire

*Nous croyons que l'objet que le mathématicien doit se proposer et atteindre est le suivant : montrer que tout ce qui apparaît au Ciel est produit par des mouvements circulaires et uniformes.*

*Ptolémée, l'Almageste*

نسبة ح ك م ا ق ا ب  
 ا ح ك م ا ق ا ب  
 كانت نسبة ح ك  
 عين ك ا ل ح ك م ا ق  
 ز ا ل ع ك م ا ق ا ب



واربعين جزا ل شمع  
 وثلاثين جزا م  
 واذا قد بقا علينا من هذا انما هو في المثلث المستقيم من اللذين بقيا هما  
 على قدره النسبة اذا اخرجنا من كل واحد من الاضلاع كانت بقينا  
 كما كانا عند الموضع من اللذين جعل الاربعة الوفية فيهما ووجدنا ضرور  
 ان يكون قوس ج م كما قوس قمر والغرض الاخر لما فيه قوس اخر  
 بان لو توسع قمر لولا مقومه بوجهه الى على هذا القوس في انه ان  
 وضع مثلثه البقا ج م وضع بر ا ج م كوا من ضلع البقا ج م  
 ج م الى ا ب م ج م من ح ك البقا ج م كانت نسبة ح ك ج م الى ح ك  
 د ا الى اعظم من نسبة قمر الى البقا ج م الى ا ب م ج م بل وتبين ان  
 على هذه البقا ج م فانها لم تكن البقا ج م الى ا ب م ج م الا بخلاف  
 وتخرج كذا البقا ج م من على الاستقامة ولينتهي على بقية ز ا ي

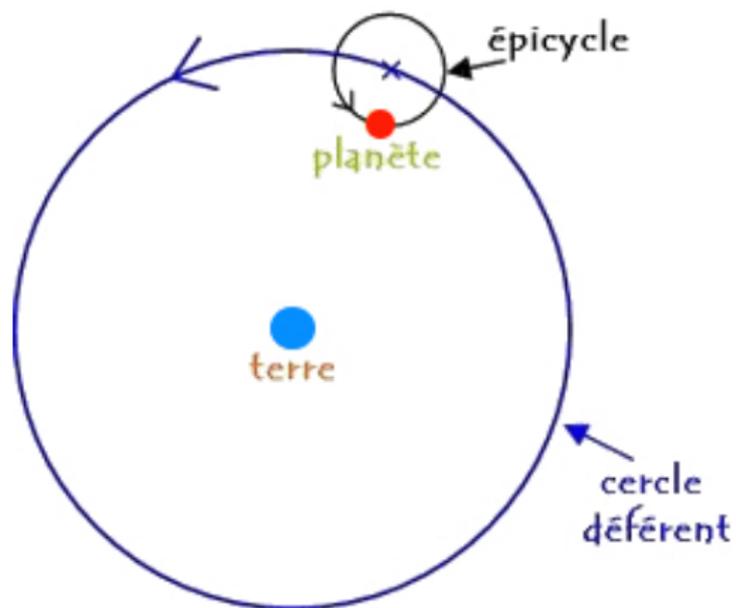
بما ذكره الا جزا فلان ما به ودمته وسنوي جزا وخمسة ف ا ب و ا ر ا ب  
 وثلاثون شانه ما فلان ان نسبة ما على قدره الفان ما به وخمسة  
 وسنوي جزا وخمسة ف ا ب و ا ر ا ب وثلاثون شانه الملائمة الا لا ي  
 وخمسة ما به وسبعة وخمسين جزا وخمسة ا ر ا ب و ا ر ا ب فبقه فيما خرج  
 من القسمة قمر واربعين جزا وسنوي ف ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 ضلعه وهو جزا ودمته واحد واربعون شانه فبقه عناه بعينه  
 ح ك م ا ق ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 وعشرون جزا وخمسة عشر ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 لنا ح ك م ا ق ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 كما ان البقا ج م و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 البقا ج م و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 ح ك م ا ق ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 ملائمة ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 د فبقه فبقه ح ك م ا ق ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 الى بقا ح ك م ا ق ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 جزا وسنوي وعشرون فبقه و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 سنه وثلاثون جزا واحد وعشرون فبقه و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب  
 الى بقا البقا ج م و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب و ا ر ا ب

الاصغر من ا ح ك م ا ق ا ب  
 والاصغر من ا ح ك م ا ق ا ب  
 والاصغر من ا ح ك م ا ق ا ب

الاصغر من ا ح ك م ا ق ا ب

La Composition Mathématique, alias L'Almageste

# La solution des épicycles



Vidéo *Epicyle*

Vidéo *Epicycle Si* (Christián Carman and Ramiro Serra)



Traité de Qotb al-Din Chirazi (1236-1311)

Partie III  
Les cercles du feu



# Les anneaux de l'Etna





Joseph Fourier  
1768 Auxerre - 1830 Paris

# Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830 )

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur

# Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830 )

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.

# Vive la Révolution !

Sa demande à l'effet de subir l'examen de l'artillerie, quoique vivement appuyée par notre illustre confrère Legendre, fut repoussée avec un cynisme d'expressions dont vous allez être juges vous - mêmes : « Fourier, répondit le ministre, « n'étant pas noble, ne pourrait entrer dans l'artillerie, quand « il serait un second Newton ! »

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.
- ▶ 1787 : Noviciat de bénédictin

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.
- ▶ 1787 : Noviciat de bénédictin
- ▶ 1787 : *Sur la résolution des équations numériques de degré quelconque*

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.
- ▶ 1787 : Noviciat de bénédictin
- ▶ 1787 : *Sur la résolution des équations numériques de degré quelconque*
- ▶ 1789 : Révolutionnaire enthousiaste, membre du Comité de surveillance d'Auxerre

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.
- ▶ 1787 : Noviciat de bénédictin
- ▶ 1787 : *Sur la résolution des équations numériques de degré quelconque*
- ▶ 1789 : Révolutionnaire enthousiaste, membre du Comité de surveillance d'Auxerre
- ▶ 1794 : Élève de l'École Normale supérieure

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.
- ▶ 1787 : Noviciat de bénédictin
- ▶ 1787 : *Sur la résolution des équations numériques de degré quelconque*
- ▶ 1789 : Révolutionnaire enthousiaste, membre du Comité de surveillance d'Auxerre
- ▶ 1794 : Élève de l'École Normale supérieure
- ▶ 1797 : Professeur à Polytechnique à 29 ans

- ▶ Fils d'un garçon-tailleur
- ▶ Orphelin à 8 ans
- ▶ École militaire tenue par les Bénédictins.
- ▶ 1787 : Noviciat de bénédictin
- ▶ 1787 : *Sur la résolution des équations numériques de degré quelconque*
- ▶ 1789 : Révolutionnaire enthousiaste, membre du Comité de surveillance d'Auxerre
- ▶ 1794 : Élève de l'École Normale supérieure
- ▶ 1797 : Professeur à Polytechnique à 29 ans
- ▶ 1798 : participe à la campagne d'Égypte



- ▶ 1802 : Napoléon le nomme préfet de l'Isère

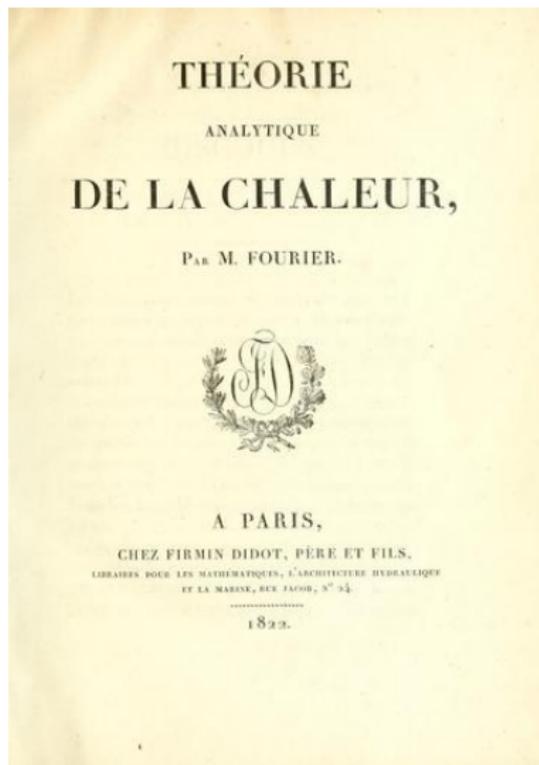
- ▶ 1802 : Napoléon le nomme préfet de l'Isère
- ▶ 1814 : Bonapartiste dans la Restauration
- ▶ 1815 : Directeur du Bureau de la Statistique de la Seine

- ▶ 1802 : Napoléon le nomme préfet de l'Isère
- ▶ 1814 : Bonapartiste dans la Restauration
- ▶ 1815 : Directeur du Bureau de la Statistique de la Seine
- ▶ 1817 : Membre de l'Académie des sciences
- ▶ 1822 : Secrétaire perpétuel
- ▶ 1822 : Publication de la *Théorie analytique de la chaleur*

# Un Égyptien au Père-Lachaise



# Un livre flamboyant



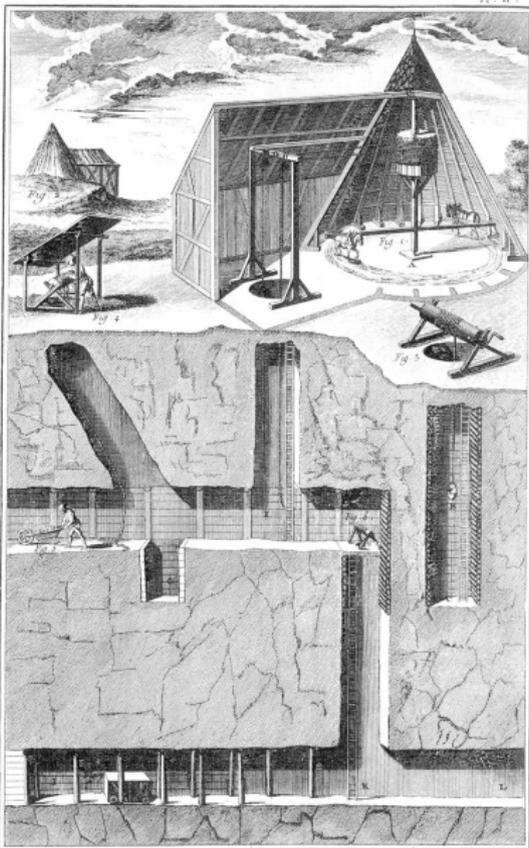


Figure III.

Planch. III.

Minéralogie, coupe d'une Mine.

## L'indifférence des mines

L'intermittence des jours et des nuits, les alternatives des saisons occasionnent, dans la terre solide, des variations périodiques qui se renouvellent chaque jour ou chaque année; mais ces changements sont d'autant moins sensibles que le point où on les mesure est plus distant de la surface. On ne peut remarquer aucune variation diurne à la profondeur d'environ 3<sup>m</sup>; et les variations annuelles cessent d'être appréciables à une profondeur beaucoup moindre que 60<sup>m</sup>.

F.

## Une question anodine...

Pourquoi les températures terrestres cessent-elles d'être variables à une profondeur si petite par rapport au rayon du globe?

## ... deux incroyables défis scientifiques !

Si des lois constantes règlent la distribution de la chaleur dans la matière solide, quelle est l'expression mathématique de ces lois? et par quelle analyse peut-on déduire de cette expression la solution complète des questions principales?

# Le double pari de Fourier

1. Trouver une **équation** décrivant la température

# Le double pari de Fourier

1. Trouver une **équation** décrivant la température
2. Inventer une **méthode** pour résoudre cette équation

# L'équation de la chaleur

On obtient ainsi l'équation générale

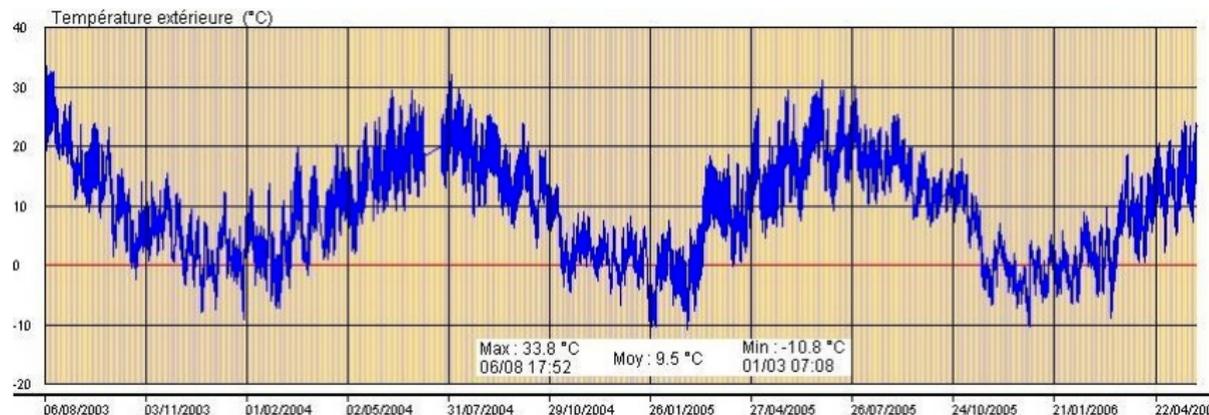
$$(A) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{cD} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

qui est celle de la propagation de la chaleur dans l'intérieur de tous les corps solides (1).

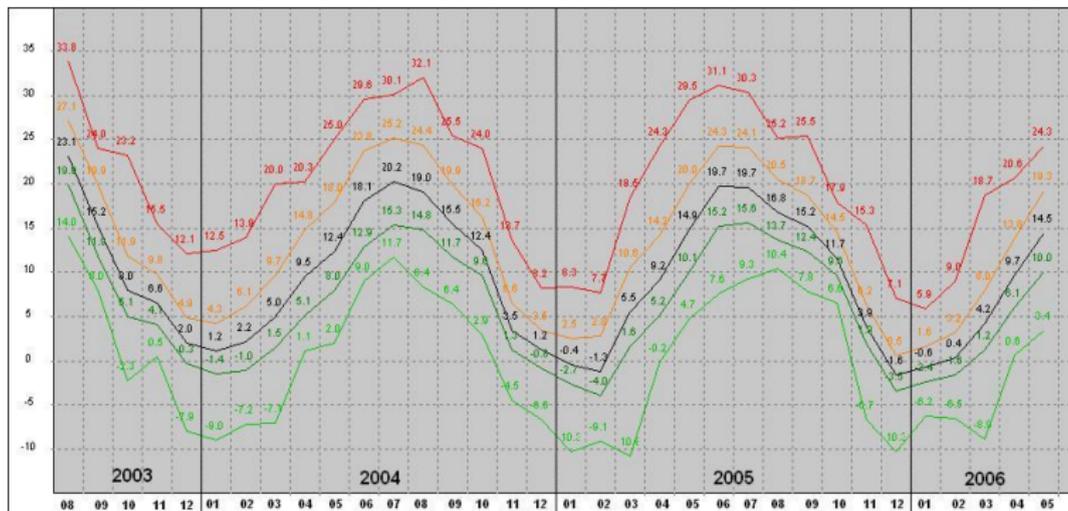
## La stratégie pour résoudre de l'équation

Afin de considérer la question dans ses éléments, on cherchera en premier lieu les plus simples fonctions de  $x$  et  $y$ , qui puissent satisfaire à l'équation (a); ensuite on donnera à cette valeur de  $c$  une expression plus générale, afin de remplir toutes les conditions énoncées.

# Un exemple

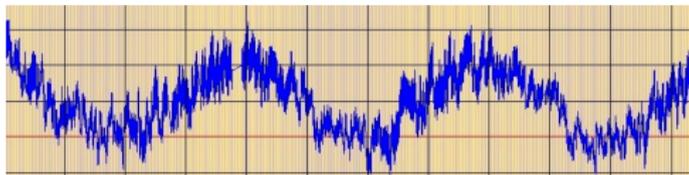


Température journalière moyenne à Theys



Température mensuelle moyenne à Theys (en noir)

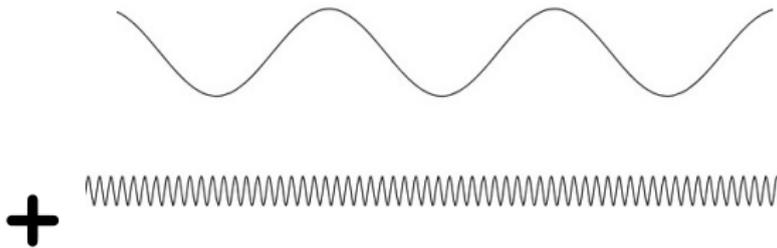
# En première approximation



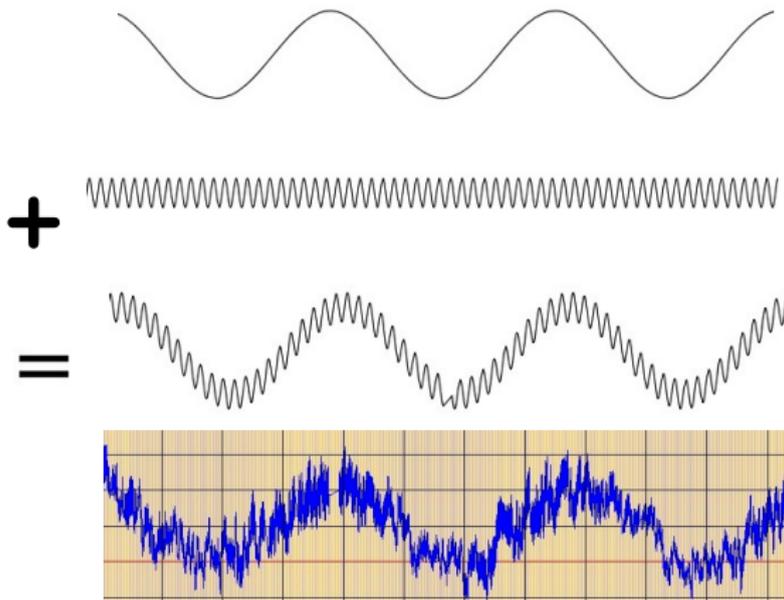
# Le sinus et le cercle

Vidéo *Sinus et Cercle*

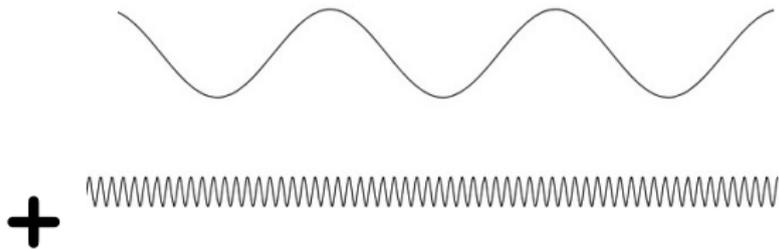
## En seconde approximation



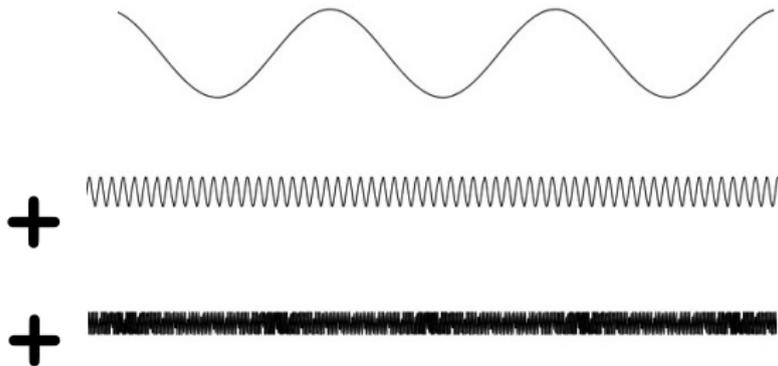
# En seconde approximation



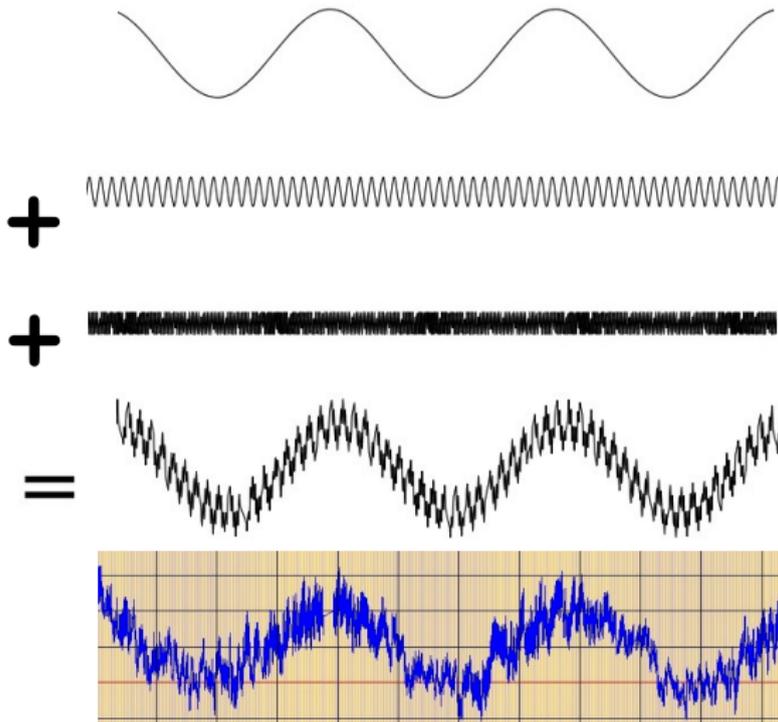
# En troisième approximation



# En troisième approximation



# En troisième approximation



# Le retour des épicycles

## SECTION VI.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ARBITRAIRE EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

on n'a traité qu'un seul cas d'un problème plus général, qui consiste à développer une fonction quelconque en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

Vidéo *Fourier*  
Vidéo *Fourier2*

# Résumé

**Ptolémée**

**Fourier**

# Résumé

**Ptolémée**

-----

Trajectoires de planètes

**Fourier**

-----

Évolution de la température

# Résumé

**Ptolémée**

-----

Trajectoires de planètes

*Cercle*

**Fourier**

-----

Évolution de la température

*Sinus*

# Le diplomate



# Le diplomate



« Parce que je suis très gentil. »

Partie IV  
Des épicycles dans vos MP3





MPEG-2 Audio Layer III

# Un doctorant sachant compresser



Karlheinz Brandenburg (né en 1954)

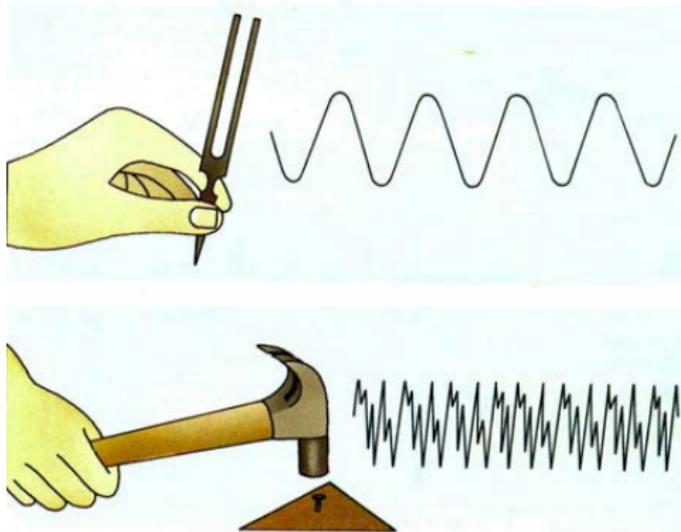
# La muse du MP3

Vidéo *clip*

Le son est une onde

Vidéo *Vibration*

# Le son est une onde



Exemple *Cindrella*

# Principe 1 : deux nombres au lieu d'une infinité

- ▶ Une onde compliquée = une infinité de nombres

## Principe 1 : deux nombres au lieu d'une infinité

- ▶ Une onde compliquée = une infinité de nombres
- ▶ Un sinus = deux nombres : sa fréquence et son amplitude !

## Principe 2 : Fourier

- ▶ une onde compliquée = une somme de sinus

## Principe 3 : éliminer les sinus inutiles

- ▶ les sinus de très petite amplitude
- ▶ les sinus de fréquence inaudible !

# Résumé bis

**Ptolémée**

**Fourier**

**MP3**

# Résumé bis

**Ptolémée**

-----

Trajectoires  
de planètes

**Fourier**

-----

Évolution  
de la température

**MP3**

-----

Ondes  
sonores

# Résumé bis

**Ptolémée**

-----

Trajectoires  
de planètes

*Cercle*

**Fourier**

-----

Évolution  
de la température

*Sinus*

**MP3**

-----

Ondes  
sonores

*Sinus*

# Conclusion



# Quatre morales

1. La beauté et la simplicité sont des moteurs fondamentaux des mathématiques et de la physique

# Quatre morales

1. La beauté et la simplicité sont des moteurs fondamentaux des mathématiques et de la physique
2. La simplicité peut former du très complexe

# Quatre morales

1. La beauté et la simplicité sont des moteurs fondamentaux des mathématiques et de la physique
2. La simplicité peut former du très complexe
3. *La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.* Henri Poincaré

## Quatre morales

1. La beauté et la simplicité sont des moteurs fondamentaux des mathématiques et de la physique
2. La simplicité peut former du très complexe
3. *La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.* Henri Poincaré (Une même idée mathématique peut s'exprimer dans des domaines différents)

## Quatre morales

1. La beauté et la simplicité sont des moteurs fondamentaux des mathématiques et de la physique
2. La simplicité peut former du très complexe
3. *La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.* Henri Poincaré (Une même idée mathématique peut s'exprimer dans des domaines différents)
4. On ne peut jamais deviner les applications d'une recherche fondamentale

