Examen de la seconde session

18 juin 2015- 4 heures

Aucun document autorisé. Le sujet est composé de sorte qu'il n'y a aucun calcul long ou d'explication longue pour obtenir la note maximale. Merci en retour d'être concis.

1. Question de cours. Énoncer le théorème d'inversion locale pour une application de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est une application linéaire surjective, le théorème s'applique-t-il toujours au point $0 \in \mathbb{R}^n$? Si non, donner un contre-exemple.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 + \lambda Trace(A)A. \end{array}$$

   (a) Question préliminaire. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$aH = bTrace(H)I_n.$$

   Donner une équation linéaire scalaire satisfaite par $Trace(H)$. En déduire que si (a, b) n'appartient pas à une droite qu'on explicitera, alors $H = 0_n$.

   (b) Pour $n = 1$, montrer que f est différentiable en 1 et donner sa différentielle.

   (c) Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle en $A \in M_n(\mathbb{R})$.

   (d) On suppose que $\lambda \geq 0$. En utilisant le résultat de la question (2a), montrer que f est inversible au voisinage de I_n.

   (e) Montrer que pour $\lambda = -1$ et $n \in \{1, 2\}$, f n'est pas inversible au voisinage de I_n. *Indication : traiter d'abord le cas $n = 1$. Pour $n = 2$, on pourra chercher des matrices diagonales ayant mêmes images par f.*

   (f) Pour $\lambda = 0$, montrer que $df(I_n)$ est inversible et calculer son inverse. En déduire un développement limité de $g = f^{(-1)}$ d'ordre 1 au voisinage de $f(I_n)$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par longueur d'arc s, C^2 et birégulière telle que sa courbure K et sa torsion T vérifient

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall s \in \mathbb{R},\ T(s) = aK(s).$$

   On rappelle que $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ est le repère de Frenet en $f(s)$.

   (a) Uniquement pour cette question, on suppose que $a = 0$. Trouver toutes les courbes satisfaisant le problème.

   (b) Montrer que $\beta = a\tau + u$, où $u \in \mathbb{R}^3$ est vecteur constant non nul. Que vaut $\|u\|$?

(c) Montrer (facilement !) que ν est orthogonal à u.

(d) Déduire de (3b) une expression de ν' en fonction de a, K, τ et u.

(e) Que vaut $\langle \nu', u \rangle$? Déduire de la question (3d) que $\langle \tau, u \rangle$ est constant. Qu'est-ce que cette condition signifie géométriquement pour la courbe f ?

4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞, F la primitive de $v \mapsto \sqrt{1 + (g'(v))^2}$ s'annulant en 0, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'application

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u, v) = (u, v, g(v)).$$

(a) Montrer que f est deux fois différentiable.

(b) Montrer que la surface paramétrée est régulière en tout point (u, v).

(c) Donner une équation du plan tangent affine $T(u, v)$ en $f(u, v)$.

(d) Soient $a \geq 1$, $b \geq 1$. Déterminer l'aire algébrique $A(a, b)$ de la surface $f([1, a] \times [1, b])$ en fonction de a, b et F.

(e) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal unitaire en tout point de la surface.

(f) Démontrer qu'au moins l'une des courbures principales est constante. *Indication : il n'y a quasiment aucun calcul à faire.*

(g) On suppose, uniquement dans cette question, que g est une application affine. Donner toutes les courbures principales. *Indication : il n'y a quasiment aucun calcul à faire.*

(h) On considère la courbe paramétrée $h : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t, t)$. Montrer qu'elle est régulière. À quelle condition sur g est-elle birégulière ?

(i) Si h est birégulière en t, donner une équation du plan osculateur affine de la courbe $h(\mathbb{R})$ en $h(t)$. Quand ce plan est-il parallèle au plan tangent de la surface en un point quelconque de S ?

5. On considère le système différentiel (E)

$$\begin{cases} x'(t) & = & x + y + t \\ y'(t) & = & 2y + 1 \end{cases}$$

(a) Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ?

(b) Exprimer le système sous forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

(c) Déterminer les valeurs propres $\lambda \leq \mu$ de A, ainsi que les sous-espaces propres E_λ et E_μ associés à λ et μ.

(d) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et Δ une matrice diagonale de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1} \Delta P$.

(e) Calculer $e^{(t-t_0)A}$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, puis toutes les solutions du système homogène.

(f) Déterminer les solutions de (E) telles que $x(t_0) = 1$ et $y(t_0) = 0$.