Examen de la seconde session

18 juin 2015- 4 heures

Aucun document autorisé. Le sujet est composé de sorte qu'il n'y a aucun calcul long ou d'explication longue pour obtenir la note maximale. Merci en retour d'être concis.

1. Question de cours. Énoncer le théorème d'inversion locale pour une application de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est une application linéaire surjective, le théorème s'applique-t-il toujours au point $0 \in \mathbb{R}^n$? Si non, donner un contre-exemple.
   Solution. Si f est un endomorphisme surjectif sur un ev de dimension finie, alors elle est bijective. Donc sa différentielle en 0, qui est f, est inversible et le TIL s'applique.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 + \lambda Trace(A)A. \end{array}$$

   (a) Question préliminaire. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$aH = bTrace(H)I_n.$$

   Donner une équation linéaire scalaire satisfaite par $Trace(H)$. En déduire que si (a, b) n'appartient pas à une droite qu'on explicitera, alors $H = 0_n$.
   Solution. La trace étant linéaire, on a

$$aTr(H) = bTr(I_n)Tr(H)$$

   soit $(a - bn)Tr(H) = 0$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = yn\}$. Alors si $(a, b) \notin D$, on a $TrH = 0$. Donc $aH = 0$. Puisque $a \neq 0$, $TrH = 0$.

   (b) Pour $n = 1$, montrer que f est différentiable en 1 et donner sa différentielle.
   Solution. On a $f(x) = (1 + \lambda)x^2$, donc f est un polynôme donc dérivable donc différentiable, et $df(a) = 2a(1 + \lambda)dx$ et $df(1) = 2(1 + \lambda)dx$.

   (c) Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle en $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   Solution. L'application $A \mapsto A^2$ est polynomiale en les coefficients, donc différentiable puisque de dérivées partielles C^∞. De plus, la trace est linéaire donc différentiable, donc le produit $Tr(A)A$ est différentiable. On a

$$f(A + H) = \big(AH + HA + \lambda Tr(H)A + \lambda Tr(A)H\big) + H^2 + \lambda Tr(H)H.$$

   Le terme H^2 est un $o(\|H\|)$ ainsi que le dernier terme, et le reste est linéaire en H, donc

$$df(A)(H) = AH + HA + \lambda Tr(H)A + \lambda Tr(A)H.$$

   En particulier, $df(0_n) = 0$ and $df(I_n)(H) = (2 + \lambda n)H + \lambda Tr(H)I_n$.

(d) On suppose que $\lambda \geq 0$. En utilisant le résultat de la question (2a), montrer que f est inversible au voisinage de I_n.

Solution. Supposons $H \in \ker df(I_n)$. On a donc $(2+\lambda n)H = -\lambda I_n Tr(H)$. Avec $a = 2+\lambda n$ et $b = -\lambda$, on a d'abord $a \geq 2$ donc $a \neq 0$ et $(a,b) \notin D$ ssi $(2+\lambda n) \neq -\lambda n$ ce qui est vrai car les deux membres sont non nuls et de signes opposés. Donc $H = 0$, et $df(I_n)$ est inversible, donc d'après le TIL, f est inversible au voisinage de I_n.

(e) Montrer que pour $\lambda = -1$ et $n \in \{1,2\}$, f n'est pas inversible au voisinage de I_n. *Indication : traiter d'abord le cas $n = 1$. Pour $n = 2$, on pourra chercher des matrices diagonales ayant mêmes images par f.*

Solution. Pour $n = 1$, $f = 0$ donc n'est pas injective au voisinage de $I_1 = 1$. Pour $n = 2$, $f(diag(u,v)) = diag(u^2, v^2) - (u+v)diag(u,v) = diag(u^2 - (u+v)u, v^2 - (u+v)v) = diag(-uv, -uv)$. Donc $f(1+\epsilon, 1-\epsilon) = f(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, donc en prenant $\epsilon \to 0$, on constate que f n'est pas injective au voisinage de I_n.

(f) Pour $\lambda = 0$, montrer que $df(I_n)$ est inversible et calculer son inverse. En déduire un développement limité de $g = f^{(-1)}$ d'ordre 1 au voisinage de $f(I_n)$.

Solution. Par le TIL et la question précédente, g différentiable en $f(I_n)$ et de différentielle $(df(I_n))^{-1}$. Or si $\lambda = 0$, $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$, $df(I_n)(H) = 2H$, donc

$$(df(I_n))^{(-1)}(K) = \frac{1}{2}K.$$

Le développement de Taylor donne

$$\begin{aligned} g(f(I_n)+K) &= I_n + (df(I_n))^{-1}(K) + o(\|K\|) \\ &= I_n + \frac{1}{2}K + o(\|K\|). \end{aligned}$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par longueur d'arc s, C^2 et birégulière telle que sa courbure K et sa torsion T vérifient

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall s \in \mathbb{R},\ T(s) = aK(s).$$

On rappelle que $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ est le repère de Frenet en $f(s)$.

(a) Uniquement pour cette question, on suppose que $a = 0$. Trouver toutes les courbes satisfaisant le problème.

(b) Montrer que $\beta = a\tau + u$, où $u \in \mathbb{R}^3$ est vecteur constant non nul. Que vaut $\|u\|$?

Solution. On a $\beta' - a\tau' = T\nu - aK\nu = 0$. Donc $\beta - a\tau$ est un vecteur constant u. S'il était nul, ν et β seraient colinéaires ce qui est impossible puisqu'ils sont orthgonaux et non nuls. On a $\|u\|^2 = \|\beta\|^2 + a^2\|\tau\|^2 - 2a\langle\beta,\tau\rangle = 1 + a^2$ soit $\|u\| = \sqrt{1+a^2}$.

(c) Montrer (facilement !) que ν est orthogonal à u.

Solution. On a $\nu = \beta \wedge \tau = (u + a\tau) \wedge \tau = u \wedge \tau$ qui est orthogonal à u.

(d) Déduire de (3b) une expression de ν' en fonction de a, K, τ et u.
Solution. On a $\nu' = -K\tau - T\beta = -K\tau - aK\beta = -K\tau - aK(a\tau + u) = -K((1+a^2)\tau - u)$.

(e) Que vaut $\langle \nu', u\rangle$? Déduire de la question (3d) que $\langle \tau, u\rangle$ est constant. Qu'est-ce que cette condition signifie géométriquement pour la courbe f ?
Solution. En dérivant $\langle \nu, u\rangle = 0$, on obtient $\langle \nu', u\rangle = 0$. Par ailleurs

$$\langle \nu', u\rangle = -K((1+a^2)\langle \tau, u\rangle - \|u\|^2),$$

donc puisque $K \neq 0$ car f est birégulière, on a $(1+a^2)\langle \tau, u\rangle = \|u\|^2 = 1+a^2$ soit $\langle \tau, u\rangle = 1$. On a donc $\langle f(s) - f(s_0), u\rangle = s - s_0$, donc si u est verticale, la hauteur de la courbe croît avec sa longueur.

4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞, F la primitive de $v \mapsto \sqrt{1+(g'(v))^2}$ s'annulant en 0, et $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'application

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u,v) = (u, v, g(v)).$$

(a) Montrer que f est deux fois différentiable.
Solution. Les applications $u \mapsto u$ et $v \mapsto v$ sont polynomiales donc C^∞ comme g. Donc les coordonnées de f ont des dérivées partielles C^∞. Le cours nous dit qu'alors f est C^∞, donc deux fois différentiable.

(b) Montrer que la surface paramétrée est régulière en tout point (u,v).
Solution. On a $\partial_u f = i$ et $\partial_v f = j + g'(v)k$. Or $\partial_u f \wedge \partial_v f = k - g'(v)j$ n'est jamais nul, donc la surface est régulière.

(c) Donner une équation du plan tangent affine $T(u,v)$ en $f(u,v)$.
Solution. $M = (x,y,z) \in T(u,v)$ ssi $\langle \overrightarrow{f(u,v)M}, -g'(v)j + k\rangle = 0$ soit

$$-(y-v)g'(v) + (z - g(v)) = 0.$$

(d) Soient $a \geq 1$, $b \geq 1$. Déterminer l'aire algébrique $A(a,b)$ de la surface $f([1,a]\times[1,b])$ en fonction de a, b et F.
Solution. D'après la question précédente, $\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|(u,v) = \sqrt{1+(g'(v))^2}$. On a donc d'après le cours

$$A(a,b) = \iint_{[1,a]\times[1,b]} \sqrt{1+(g'(v))^2)}dudv = (a-1)(F(b) - F(1)).$$

(e) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal unitaire en tout point de la surface.
Solution. $N(u,v) = \frac{k - g'(v)j}{\sqrt{1+(g'(v))^2)}}$ convient.

(f) Démontrer qu'au moins l'une des courbures principales est constante. *Indication : il n'y a quasiment aucun calcul à faire.*
Solution. On constate que $N'_u = 0$, donc la première colonne de la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base $\{f'_u, f'_v\}$ est nulle, donc dégénérée, donc 0 est une valeur propre de II_S dans une BON de $T_{f(u,v)}S$, donc 0 est courbure principale.

(g) On suppose, uniquement dans cette question, que g est une application affine. Donner toutes les courbures principales. *Indication : il n'y a quasiment aucun calcul à faire.*

Solution. Dans ce cas $g(v) = \alpha v + \beta$, donc $g'(v)$ est constante. On a alors $N(u, v)$ constante, donc $N'_v = 0$ et la seconde forme fondamentale est nulle, donc les deux courbures sont nulles. On remarque que S est en fait un plan, donc de courbures principales nulle.

(h) On considère la courbe paramétrée $h : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t, t)$. Montrer qu'elle est régulière. À quelle condition sur g est-elle birégulière ?

Solution. On a $f(t) = (t, t, g(t))$ donc $f'(t) = (1, 1, g'(t))$ ne s'annule jamais donc f est régulière. De plus $f''(t) = (0, 0, g''(t))$. Donc $f' \wedge f'' = -g''(t)(1, -1, 0)$ est non nul si $g''(t) \neq 0$.

(i) Si h est birégulière en t, donner une équation du plan osculateur affine de la courbe $h(\mathbb{R})$ en $h(t)$. Quand ce plan est-il parallèle au plan tangent de la surface en un point quelconque de S ?

Solution. Le plan osculateur P_t en $h(t)$ est orthogonal à $(1, -1, 0)$, donc $M = (x, y, z) \in P_t$ ssi $\langle \overrightarrow{Mh(t)}, (1, -1, 0) \rangle = 0$ soit $(x - t) - (y - t) = 0$, donc $x = y$. L'équation du plan vectoriel associé est aussi $x - y = 0$, qui ne contient pas i. Or le vecteur i est toujours dans le plan tangent vectoriel de S, car son équation est $y + zg'(v) = 0$. Donc le plan osculateur n'est jamais parallèle à la surface.

5. On considère le système différentiel (E)

$$\begin{cases} x'(t) &= x + y + t \\ y'(t) &= 2y + 1 \end{cases}$$

(a) Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ?

Réponse : C'est un système linéaire à coefficients définis et continues sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que les solutions sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Exprimer le système sous forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = {}^t(t, 1)$.

(c) Déterminer les valeurs propres $\lambda \leq \mu$ de A, ainsi que les sous-espaces propres E_λ et E_μ associés à λ et μ.

(d) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et Δ une matrice diagonale de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}\Delta P$.

(e) Calculer $e^{(t-t_0)A}$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, puis toutes les solutions du système homogène.

(f) Déterminer les solutions de (E) telles que $x(t_0) = 1$ et $y(t_0) = 0$.