Examen de la première session

20 mai 2015- 4 heures

Aucun document autorisé.

1. Question de cours. Soit $(E, \| \, \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. Quand dit-on que f est différentiable en a ? Montrer sans utiliser le cours que si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable sur E, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie. et soit $g : E \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in E, \ g(x) = \sin\big(2\pi(f(3x) + f(x)^2)\big).$$
   (a) Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en un point $a \in E$.
   (b) On suppose que $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ f(A) = \mathrm{Trace}(A)$. Pour $n = 1$, donner une expression simple de g. En déduire $dg(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $dg(I_n)$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3),$$
ainsi que
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x + y + z = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = 3\}.$$
   (a) Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $f_{|\Gamma}$ admet un minimum strictement négatif ainsi qu'un maximum strictement positif.
   (b) Y a-t-il des extrema de $f_{|\Gamma}$ sur la droite $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x = y = z\}$? En déduire **sans calcul** qu'il existe au moins six extrema de $f_{|\Gamma}$.
   (c) Déterminer tous les points critiques de $f_{|\Gamma}$.
   (d) Quelle est la nature de ces points critiques ? Que valent $\sup f_{|\Gamma}$ et $\inf f_{|\Gamma}$?

4. Soit $A \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par une abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$, ne passant jamais par A. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $\Delta(s)$ la droite affine normale à la courbe en $f(s)$ et incluse dans le plan osculateur affine de la courbe en $f(s)$. On suppose que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $A \in \Delta(s)$. On notera $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ le repère de Frenet, avec $\tau(s) = f'(s)$.
   (a) Trouver une courbe satisfaisant ces hypothèses.

(b) Déterminer deux vecteurs directeurs naturels de la droite $\Delta(s)$. En déduire qu'on peut exprimer la condition "$A \in \Delta(s)$" sous forme d'annulation d'un certain produit vectoriel.

(c) En dérivant cette dernière relation, montrer que la torsion de la courbe f est nulle.

(d) Déduire de la dérivée de la question précédente l'expression de la courbure $K(s)$ en fonction de $\langle \overrightarrow{Af(s)}, \nu(s) \rangle$. En déduire que la courbure est constante.

(e) Donner toutes les solutions du problème.

5. On considère le système différentiel (E)

$$\begin{cases} x'(t) &= x + 2y + 3z + t \\ y'(t) &= y + 2z + 1 \\ z'(t) &= z + 1 \end{cases}$$

(a) Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ?

(b) Exprimer le système sous forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

(c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de I_3, J et J^2.

(d) Calculer J^3. En déduire $\exp(tJ)$ et $\exp(tJ^2)$.

(e) On rappelle que $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$ si M et N commutent. Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(f) Résoudre le système homogène $X'(t) = AX(t)$.

(g) Soit $(x, y, z)(t)$ une solution de (E) avec condition initiale $X(t_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $x(t)$.