Examen de la première session - Corrigé

20 mai 2015- 4 heures

Aucun document autorisé.

1. Question de cours. Soit $(E, \| \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. Quand dit-on que f est différentiable en a ? Montrer sans utiliser le cours que si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable sur E, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie. et soit $g : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \ g(x) = \sin\big(2\pi(f(3x) + f(x)^2)\big).$$

(a) Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en un point $a \in E$.

Réponse : L'application $T : x \mapsto 3x$ est linéaire donc différentiable sur E, l'application $C : u \mapsto u^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc différentiable, et l'application sin est différentiable sur $\mathbb{R}$. Puisque f est différentiable sur E, les compositions $f \circ T$ et $C \circ f$ sont différentiables, donc $h = 2\pi(f \circ T + C \circ f)$ également. Par composition, $g = \sin \circ h$ est différentiable sur E. On a

$$\begin{aligned} dg(a) &= 2\pi \cos(h(a))dt \circ dh(a) = 2\pi \cos(h(a))dh(a) \\ &= 2\pi \cos(h(a))\big(df(3a) \circ 3Id + 2f(a)df(a)\big) \\ &= 2\pi \cos\big(2\pi(f(3a) + f(a)^2)\big)\big(3df(3a) + 2f(a)df(a)\big). \end{aligned}$$

(b) On suppose que $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ f(A) = \mathrm{Trace}(A)$. Pour $n = 1$, donner une expression simple de g. En déduire $dg(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $dg(I_n)$.

Réponse : Pour $n = 1$, $Tr = Id$, donc $g(x) = \sin(2\pi(3x + x^2))$ et

$$g'(1) = 2\pi \cos(2\pi(4))(3 + 2.1) = 10\pi,$$

soit $dg(1) = 10\pi dx$. On a

$$h(I_n) = 2\pi(Tr(3I_n) + Tr^2(I_n)) = 2\pi(3n + n^2),$$

et $df(3I_n) = df(I_n) = Tr$. Puisque $3n + n^2 \in \mathbb{N}$, $\cos(2\pi(3n + n^2)) = 1$ et donc

$$dg(I_n) = 2\pi(3Tr + 2nTr) = 2\pi(2n + 3)Tr.$$

Notons que pour $n = 1$, on retrouve le résultat précédent puisque alors $Tr = Id$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3),$$
ainsi que
$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = 3\}.$$

(a) Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $f_{|\Gamma}$ admet un minimum strictement négatif ainsi qu'un maximum strictement positif.

Réponse : Notons
$$(g_1, g_2)(x,y,z) = (x+y+z, \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - 3).$$
Ce sont deux fonctions continues, donc $\Gamma = g^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ est l'intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^3$ donc est un fermé. De plus, $g_2(x,y,z) = 0$ ssi $\|(x,y,z)\|^2 \leq 6$ donc Γ est un borné, donc compact car fermé dans un evn de dimension fini. La fonction f est continue car polynomiale, donc admet et un min et un max sur Γ qui est compact. Le max n'est pas négatif, car par exemple $(-1,-1,2) \in \Gamma$ et $f(-1,-1,2) = 2 > 0$. On a aussi $f(1,1,-2) = -2$ donc le minimum est < 0.

(b) Y a-t-il des extrema de $f_{|\Gamma}$ sur la droite $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = z\}$? En déduire **sans calcul** qu'il existe au moins six extrema de $f_{|\Gamma}$.

Réponse : Si $(x,y,z) \in \Gamma$ et $x = y = z$, alors $x = y = z = 0$ par la première condition, mais $g_2(0,0,0) \neq 0$ donc il n'y a pas de d'intersection entre la droite et Γ. Si M est un extremum, par exemple un maximum, alors $-M \in \Gamma$ est un minimum car $f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$. Comme $M \neq -M$, $-M$ est un extrema différent de M. De plus comme (x,y,z) n'est pas sur la droite $x = y = z$, par exemple $z \neq y$. Mais par symétrie du problème en les permutations des coordonnées, $f(\sigma(x,y,z)) = f(x,y,z)$ pour tout $\sigma \in S_3$. Si les trois coordonnées sont distinctes, on obtient 6 maxima, et donc 6 minima, soit 12 extrema. Si $x = y$, alors on a (z,x,x) et (x,z,x) autres maxima distincts, donc 6 extremas.

(c) Déterminer tous les points critiques de $f_{|\Gamma}$.

Réponse : On a
$$df(x,y,z) = x^2dx + y^2dy + z^2dz.$$
De plus
$$dg(xy,z) = (dx+dy+dz, xdx+ydy+zdz).$$
Un point $a = (x,y,z)$ est critique pour $f_{|\Gamma}$ ssi $g(a) = 0$ et $\ker dg(a) \subset \ker df(a)$, ou s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tels que $df(a) = \lambda dg_1(a) + \mu dg_2(a)$, soit
$$\begin{aligned} x^2 &= \lambda + \mu x \\ y^2 &= \lambda + \mu y \\ z^2 &= \lambda + \mu z. \end{aligned}$$
On obtient en particulier $(x^2 - y^2) = \mu(x-y)$, soit $x = y$ ou bien $(x+y) = \mu$, de même pour les couples (x,z) et (y,z) par symétrie. On ne peut pas avoir

$x = y = z$. Mais si $x \neq y$, $y \neq z$ et $x \neq z$, on a $x + y = x + z = y + z$, donc $x = y = z$ ce qui est impossible. Donc exactement deux coordonnées sont égales. Supposons $x \neq y$ et $y = z$. Alors $x + 2y = 0$ et $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 3$ et donc $\frac{1}{2}(-2y)^2 + y^2 = 3$ donne $3y^2 = 3$ et donc $y = \pm 1$, soit $a = \pm(-2, 1, 1)$. Par symétrie, on obtient également $a_2 = \pm(1, 1, -2)$ et $a_3 = \pm(1, -2, 1)$.

Au total, on a 6 points critiques potentiels, qui sont forcément des extrema puisqu'il y en a au moins 6.

(d) Quelle est la nature de ces points critiques ? Que valent $\sup f_{|\Gamma}$ et $\inf f_{|\Gamma}$?

Réponse : Il y a forcément 3 minima locaux, qui sont globaux et trois maxima globaux. Le sup est un max et vaut $f(2, -1, -1) = 2$, et le min est un max et vaut -2.

4. Soit $A \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par une abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$, ne passant jamais par A. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $\Delta(s)$ la droite affine normale à la courbe en $f(s)$ et incluse dans le plan osculateur affine de la courbe en $f(s)$. On suppose que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $A \in \Delta(s)$. On notera $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ le repère de Frenet, avec $\tau(s) = f'(s)$.

(a) Trouver une courbe satisfaisant ces hypothèses.

Réponse : Un cercle centré sur A, car son plan osculateur affine est constant, la droite normale au cercle dans le plan du cercle et passant par $f(s)$ passe par son centre, qui est A.

(b) Déterminer deux vecteurs directeurs naturels de la droite $\Delta(s)$. En déduire qu'on peut exprimer la condition "$A \in \Delta(s)$" sous forme d'annulation d'un certain produit vectoriel.

Réponse : Le vecteur directeur d'une droite du plan osculateur est engendré par $\tau(s)$ et $\nu(s)$. Puisque ce vecteur directeur est normal à la courbe, il n'a pas de composante selon τ, donc est proportionnel à $\nu(s)$. La relation est $\forall s \in \mathbb{R}, \overrightarrow{Af(s)} \wedge \nu(s) = 0$.

(c) En dérivant cette dernière relation, montrer que la torsion de la courbe f est nulle.

Réponse : La dérivée donne $f'(s) \wedge \nu(s) + \overrightarrow{Af(s)} \wedge \nu' = 0$. Puisque $f' = \tau$ et $\nu' = -K\tau - T\beta$, on obtient

$$\beta + \overrightarrow{Af(s)} \wedge (-K\tau - T\beta) = 0.$$

Mais $\overrightarrow{Af(s)}$ est colinéaire à ν, donc

$$\forall s \in \mathbb{R}, \exists R(s) \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{Af(s)} = R(s)\nu(s),$$

soit $(1 + KR)\beta - RT\tau = 0$. On en déduit, puisque $R \neq 0$ car $f(s) \neq A$, $T = 0$ et $K = -1/R$.

(d) Déduire de la dérivée de la question précédente l'expression de la courbure $K(s)$ en fonction de $\langle \overrightarrow{Af(s)}, \nu(s) \rangle$. En déduire que la courbure est constante.

Réponse : On a $\overrightarrow{Af} = -1/K\nu$, donc $-1/K = \langle \overrightarrow{Af}, \nu \rangle$. Or la dérivée du membre de droite est $\langle \tau, \nu \rangle + \langle \overrightarrow{Af}, -K\tau - T\beta \rangle = 0$ car $\overrightarrow{Af} = R\nu$.

(e) Donner toutes les solutions du problème.

Réponse : La courbe est de courbure constante, et de torsion nulle. C'est le cas des cercles, donc par le cours, la courbe est isométrique à un cercle. Son centre est forcément A. Donc les solutions sont les cercles centrés sur A.

5. On considère le système différentiel (E)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x+2y+3z+t \\ y'(t) & = & y+2z+1 \\ z'(t) & = & z+1 \end{array}\right.$$

(a) Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ?

Réponse : C'est un système linéaire à coefficients constants, donc continus et définis pour tout temps. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que les solutions sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Exprimer le système sous forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = {}^t(t, 1, 1)$.

(c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de I_3, J et J^2.

Réponse : On a $A = I_3 + 2J + 3J^2$.

(d) Calculer J^3. En déduire $\exp(tJ)$ et $\exp(tJ^2)$.

Réponse : On a $J^3 = 0$, donc $J^k = 0$ pour $k \geq 3$. Donc

$$\exp(2tJ) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2t)^n J^n}{n!} = I_3 + 2tJ + 2t^2 J^2.$$

De plus

$$\exp(3tJ^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3t)^n J^{2n}}{n!} = I_3 + 3tJ^2.$$

(e) On rappelle que $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$ si M et N commutent. Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Réponse : J, J^2 et I_3 commutent, donc

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= e^t I_3 (I_3 + 2tJ + 2t^2 J^2)(I_3 + 3tJ^2) \\ &= e^t (I_3 + 2tJ + 2t^2 J^2 + 3tJ^2) \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2 + 3t \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(f) Résoudre le système homogène $X'(t) = AX(t)$.
Réponse : Les solutions sont $X(t) = e^{tA}\ X_0,\ X_0 \in \mathbb{R}^3$.

(g) Soit $(x, y, z)(t)$ une solution de (E) avec condition initiale $X(t_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $x(t)$.
Réponse : La troisième ligne du système donne $z' = z + 1$. $z = -1$ est une solution particulière, donc $z(t) = (z_0 + 1)e^t - 1$.