Examen de la seconde session - 4 heures

Question de cours. Enoncer le théorème des fonctions implicites pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \cosh(x+y+z)$ et Γ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $\cosh x + \cosh y + \cosh z = 5$. On rappelle que $2\sinh = e^x - e^{-x}$ et $2\cosh = e^x + e^{-x}$.

1. Résoudre l'équation $3\cosh x = 5$. **On a** $X + 1/X = 10/3$ **avec** $X = e^x$. **Soit** $X^2 - 10/3X + 1 = 0$ **car** $X = 0$ **n'est pas solution. On trouve** $X = 5/3 \pm \sqrt{25/9 - 1} = 5/3 \pm 4/3$, **soit** $X = 1/3$ **et** $X = 3$. **D'où** $x = -\ln 3$ **et** $x = \ln 3$.
2. Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^3$.
   Sol. L'application $g = \cosh x + \cosh y + \cosh z - 5$ **est continue et** Γ **est l'image réciproque du fermé** $\{0\}$ **par** g, **donc est fermé. De plus,** $(x,y,z) \in \Gamma$ **implique** $\cosh x \leq 5$. **Or** $\cosh$ **tend vers l'infini quand** $|x|$ **tend vers l'infini, donc** $|x|$ **est majoré (par** $Argcosh\ 3$**) si** $(x,y,z) \in \Gamma$, **et idem pour** y, z. **Donc** Γ **est borné, donc compact car** $\dim \mathbb{R}^3 < \infty$.
3. Montrer que $f_{|\Gamma}$ admet un maximum strictement positif en un point M_0.
   Sol. La fonction $f_{|\Gamma}$ **est continue sur** Γ **compact, donc la fonction atteint ses bornes, en particulier son maximum strictement positif car** $\cosh > 0$.
4. Déterminer la valeur maximale de $f_{|\Gamma}$.
   Sol. En un extremum de $f_{|\Gamma}$, **les gradients de** f **et** g **sont colinéaires, soit** $\exists \lambda \in \mathbb{R}, (\sinh(x+y+z), \sinh(x+y+z), \sinh(x+y+z),) = \lambda(\sinh x, \sinh y, \sinh z)$. **Si** $x+y+z \neq 0$, **cela implique que** $(\sinh x = \sinh y = \sinh z)$, **soit** $x = y = z$ **car** $\sinh$ **est bijective sur** $\mathbb{R}$. **D'aprés la question 1.,** $x = y = z = \pm \ln 3$ **et** $f = \cosh(3\ln 3) > 1$ **en ces deux points. Si** $x+y+z = 0$, $f = 1$ **en ces points, donc ce ne sont pas des maximums. D'où** $\max f_{|\Gamma} = \cosh(3\ln 3)$.
5. Quel est l'inf de $f_{|\Gamma}$?
   Sol. L'inf est un min, d'abord. Ensuite, c'est forcément un point de l'intersection du plan $x+y+z = 0$ **avec** Γ, **donc la valeur de** f **y est 1.**
6. $f_{|\Gamma'}$ a-t-elle un maximum global si Γ' est défini par $\Gamma' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \cosh x + \cosh y = 2\}$?
   Sol. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, **le point** $M(z) = (0,0,z) \in \Gamma'$, **avec** $f(M(z)) = \cosh z \to_{z \to +\infty} +\infty$, **donc il n'y a pas de maximum.**

Exercice 3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $v \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $Y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ deux applications différentiables, et $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(x) = \langle f(x)(v), g(Y(x))\rangle$.

1. Montrer que g est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et déterminer sa différentielle.
   Sol. On a $\phi(x+h) = \langle f(x)(v) + df(x)(h)(v) + o(h), g(Y(x) + dY(x)(h)) +$

$o(h)\rangle = \phi(x) + \langle df(x)(h)(v), g(Y(x))\rangle + \langle f(x)(v), g(dY(x)(h))\rangle + o(h)$. **On a donc** $d\phi(x)(h) = \langle df(x)(h)(v), g(Y(x))\rangle + \langle f(x)(v), g(dY(x)(h))\rangle$ **car c'est une application manifestement linéaire en** h**.**

2. On suppose que $p = n = 1$ Calculer la dérivée de ϕ. On a $f(x) \in \mathbb{R}$ et $g(x) \in \mathbb{R}$, soit $\phi(x) = vgf(x)Y(x)$, d'où $\phi'(x) = vg(f'Y + fY')$.

Exercice 4. Pour tous $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, on considère le système différentiel (E_0)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x + \sqrt{3}y \\ y'(t) & = & \sqrt{3}x \end{array} \right.$$

avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

1. Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ? **C'est un système linéaire à coefficients constants, donc continus et définis pour tout temps. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que les solutions sont définies pour tout** $t \in \mathbb{R}$**.**
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A, qu'on classera en prenant $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.
3. Trouver a et $b \in \mathbb{C}$ de sorte que $e_1 = (-1, a)$ soit vecteur propre associé à λ_1 et $e_2 = (\sqrt{3}, b)$ associé à λ_2.
Sol. On trouve $\lambda_1 = -1$ **et** $\lambda_2 = 3$**, avec** $e_1 = (-1, \sqrt{3})$ **et** $e_2 = (\sqrt{3}, 1)$**.**
4. Exprimer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps t, de x_0 et de y_0.
Sol. La matrice de passage P **associée est**
$$P = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$
d'inverse
$$P^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$e^{tA} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -e^{-t} - 3e^{3t} & \sqrt{3}e^{-t} - \sqrt{3}e^{3t} \\ \sqrt{3}e^{-t} - \sqrt{3}e^{3t} & -3e^{-t} - e^{3t} \end{pmatrix}.$$
Soit
$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \frac{1}{4}\big((e^{-t} + 3e^{3t})x_0 + (-\sqrt{3}e^{-t} + \sqrt{3}e^{3t})y_0\big) \\ y(t) & = & \frac{1}{4}\big((-\sqrt{3}e^{-t} + \sqrt{3}e^{3t})x_0 + (3e^{-t} + e^{3t})y_0\big) \end{array}$$

Problème.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ l'application $f(t) = (t, 0, e^{-t})$, C l'image $f([0,1])$ et Σ la surface formée par la révolution complète de C autour de l'axe (Oz).

(a) Dessiner C et tracer une esquisse de Σ.

(b) Montrer que l'aire σ de Σ vérifie $\pi < \sigma < \sqrt{2}\pi$.
Sol. L'application $F : (t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi] \mapsto F(t,\theta) \in \mathbb{R}^3$**,** $F(t,\theta) = tu_r(\theta) + e^{-t}\overrightarrow{k}$**, est une paramétrisation de** Σ**, avec** $\forall\theta \in [0,2\pi], u_r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$**. On a donc** $F'_t = u_r - e^{-t}\overrightarrow{k}$ **et** $F'_\theta = tu_\theta$**, donc** $F'_t \wedge F'_\theta = te^{-t}u_r + t\overrightarrow{k}$**, et** $\|F'_t \wedge F'_\theta\| = t\sqrt{e^{-2t}+1}$**. Donc** $\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} t\sqrt{e^{-2t}+1}dtd\theta$**.**
En utilisant $1 < e^{-2t} + 1 < 2$**, on obtient** $2\pi[t^2/2]_0^1 < \sigma < 2\sqrt{2}\pi[t^2/2]_0^1$**, d'où le résultat.**

(c) Pour tout point $m \in \Sigma \cap (Oxz)$ avec $x > 0$, déterminer une équation du plan tangent à Σ en m .
Sol. Si $\theta = 0$ **et** $t > 0$ **(car** $x > 0$**),** $e^{-t}u_r + \overrightarrow{k} = e^{-t}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ **est un vecteur normal au plan tangent en** $m = (t, 0, e^{-t})$**. Donc** $M = (x,y,z) \in T_{F(t,0)}\Sigma \Leftrightarrow (x-t)e^{-t} + (z - e^{-t}) = 0$.

(d) Déterminer un vecteur normal unitaire $N(t,\theta)$ à Σ en $F(t,\theta)$.
Sol. On a $N(t,\theta) = (F'_t \wedge F'_\theta)/\|F'_t \wedge F'_\theta\| = \frac{e^{-t}u_r + \overrightarrow{k}}{\sqrt{1+e^{-2t}}}$.

(e) Déterminer en tout point de Σ l'une de ses courbures fondamentales.
Sol. On a $N'_\theta = \frac{e^{-t}u_\theta}{\sqrt{1+e^{-2t}}}$**. C'est orthogonal à** F'_t**, donc** $\langle F'_t, N'_\theta\rangle = 0$ **et la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base** (F'_t, F'_θ) **est diagonale, donc** $\langle F'_\theta, N'_\theta\rangle$ **est une valeur propre, donc une courbure fondamentale. En l'occurence,c'est** $te^{-t}/\sqrt{1+e^{-2t}}$**.**

(f) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ **on considère la courbe** $\gamma_n(t) = tu_r(nt) + e^{-t}\overrightarrow{k}$, $t \in [0,1]$.
Montrer que $\gamma_n([0,1])$ **est une courbe tracée sur** Σ**.**
Sol. On a $\gamma_n(t) = F(t, nt) \in \Sigma$**.**

(g) Montrer que la longueur l_n de cette courbe vérifie $l_n \sim_{n\to\infty} n/2$.
Sol. On a $Long(\gamma_n([0,1]))/n = \int_0^1 \|F'_t + nF'_\theta\|dt/n = \int_0^1 \sqrt{1/n^2 + e^{-2t}/n^2 + t^2}dt$
La suite de fonctions $(\sqrt{1/n^2 + e^{-2t}/n^2 + t^2})_n$ **converge vers** t **et est dominée par** $\sqrt{1 + e^{-2t} + t^2}$ **qui est intégrable, donc par le TCD, l'intégrale converge vers** $\int_0^1 tdt = 1/2$**, d'où le résultat.**

(h) Soit $n = 0$. Déterminer pour tout t le plan oscullateur à $\gamma_0(t)$.
Sol. La courbe est dans ce cas simplement le cercle C**, qui est dans le plan** $x0z$**. Donc son plan oscullateur est ce plan-ci.**