Examen - 4 heures

Question de cours. Enoncer le théorème d'inversion locale. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^1, non constante au voisinage de 0 mais qui n'a pas d'inverse au voisinage de 0.
Sol. $f(x) = (x_1^2, 0, \cdots, 0)$ **est** C^1 **et non constante, mais pour tout** $\epsilon > 0$, f **n'est pas injective sur la boule** $B(0, \epsilon)$**, car** $f(-\epsilon) = f(\epsilon)$**.**

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$ et pour $0 < a < b < c$, Γ l'ellipsoïde défini par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1. Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^3$.
   Sol. L'application $g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ **est continue et** Γ **est l'image réciproque du fermé** $\{0\}$ **par** g**, donc est fermé. De plus,** $(x, y, z) \in \Gamma$ **implique** $\frac{1}{c^2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$**, soit** $\|M\| \leq c$ **si** $M \in \Gamma$**. Donc** Γ **est borné, donc compact car** $\dim \mathbb{R}^3 < \infty$**.**
2. Montrer que $f_{|\Gamma}$ admet un maximum strictement positif en un point M_0.
   Sol. La fonction $f_{|\Gamma}$ **est continue sur** Γ **compact, donc la fonction atteint ses bornes, en particulier son maximum strictement positif car si** $M = (a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$**, on a** $f(M) > 0$ **et** $M \in \Gamma$**.**
3. Déterminer la valeur maximale de $f_{|\Gamma}$.
   Sol. En un extremum de $f_{|\Gamma}$**, les gradients de** f **et** g **sont colinéaires, soit** $\exists \lambda \in \mathbb{R}, (yz, xz, xy) = \lambda(2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$**. C'est équivalent à** $xz^2/c^2 = xy^2/b^2$, $yz^2/c^2 = x^2y/a^2$ **et** $zy^2/b^2 = x^2z/a^2$**. Le maximum n'est pas atteint si une coordonnée est nulle, donc le système est équivalent, si** (x, y, z) **est maximum, à** $z/c = \pm y/b = \pm x/a$**. On a donc** $(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\pm a, \pm b, \pm c)$**, avec le produit des trois signes positif, et le maximum est** $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$**.**
4. $f_{|\Gamma'}$ a-t-elle un maximum global si Γ' est défini par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$?
   Sol. Pour tout $z \in \mathbb{R}^+$**, le point** $M(z) = (\frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}, \frac{b}{2}\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}, z) \in \Gamma'$**, avec** $f(M(z)) = \frac{abz}{4}(1 + \frac{z^2}{c^2}) \to_{z \to +\infty} +\infty$**, donc il n'y a pas de maximum.**

Exercice 2. Soit $k > 0$ une constante et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose de plus que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une application non constante qui ne vérifie pas cette condition, pour aucun $k > 0$.
   Sol. Par exemple, $f(x) = (x_1^2, 0, \cdots, 0)$**. S'il existe** $k > 0$**, telle que** $\|f(x) - f(0)\| = x_1^2 \geq k\|x - 0\|$**, alors** $\|x\| \geq |x_1|$ **implique** $x_1^2 \geq k|x_1|$ **ce qui est faux pour** x_1 **assez petit.**
2. Montrer que f est injective.
   Sol. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ **tels que** $f(x) = f(y)$**. Alors** $k\|x - y\|$ **qui est positif est aussi** ≤ 0 **par la condition, donc est nul. Comme** $k \neq 0$**, on a** $x = y$ **et donc** f **est injective.**

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible.
Sol. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. On a $f(x+h)-f(x) = df(x)(h)+o(h)$, donc $\|df(x)(h)+o(h)\| \geq k\|h\|$, soit $\|df(x)(h)\| \geq k\|h\| - o(h) \geq \frac{k}{2}\|h\|$ pour h assez petit. Donc $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est injective donc inversible car c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.
4. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.
Sol. Soit $(y_n)_n$ une suite de $f(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers y. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $f(x_n) = y_n$ pour tout n. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a $\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{k}\|y_p - y_q\|$. Or (y_n) converge donc est de Cauchy, donc $(x_n)_n$ est également de Cauchy, donc converge vers x dans $\mathbb{R}^n$ qui est complet car de dimension finie. Par continuité, $y = \lim_n y_n = \lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n) = f(x)$, et $y \in f(\mathbb{R}^n)$, donc $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
5. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
Sol. Puisque la differéntelle de f en tout point est inversible, le cours nous dit que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte. Elle est aussi fermée et non vide, donc par connexité de $\mathbb{R}^n$, c'est tout $\mathbb{R}^n$. De plus f est injective, donc le théorème d'inversion globale nous dit que f est un difféomorphisme.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application différentiable, telle que $f(0)$ est inversible, et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = (f(x))(x)$.

1. Montrer que g est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et déterminer sa différentielle.
Sol. On a $g(x+h) = f(x+h)(x+h) = (f(x) + df(x)(h) + o(h))(x+h) = f(x)(x) + df(x)(h)(x) + f(x)(h) + o(h)$, donc g est dérivable et $dg(x)(h) = df(x)(h)(x) + f(x)(h)$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tel que $g_{|U} : U \to g(U)$ est un difféomorphisme.
Sol. La différentielle de g est manifestement continue car f est C^1, donc g est C^1. De plus, $dg(0) = f(0)$ est inversible, donc le théorème d'inversion locale s'applique : g est localement un difféomorphisme.
3. On suppose que $n = 1$. La fonction g est-elle toujours inversible sur $\mathbb{R}$?
Sol. Dans ce cas, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a(x) \in \mathbb{R}, \ \forall h \in \mathbb{R}, f(x)(h) = a(x)h,$, avec $a(0) \neq 0$, et $g(x) = xa(x)$. On choisit a à support compact K dans $\mathbb{R}$. Alors $g = 0$ pour x hors de K, donc n'est pas injective, donc pas inversible.

Exercice 4. Pour tout $\epsilon \geq 0$, on considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= -y + \epsilon x^3 \\ y'(t) &= \ \ x + \epsilon y^3 \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question que $\epsilon = 0$. Résoudre le système.
Sol. C'est un système linéaire. $(\cos t, \sin t)$ et $(\sin t, -\cos t)$ sont deux solutions indépendantes, donc toute solution (x, y) est une combinaison linéaire de ces deux solutions.

2. Montrer que pour tout $((x_0, y_0), t_0) \in \mathbb{R}^3$,, il existe une unique solution maximale de conditition initiale $(x, y)(t_0) = (x_0, y_0)$.
L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-y + \epsilon x^3, x + \epsilon y^3)$ est C^1, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire, il existe une unique solution maximale pour toute condition initiale.
3. Soit $u(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Montrer que $u' \leq 2\epsilon u^2$.
Sol. On a $u' = 2xx' + yy' = -2xy + 2\epsilon x^4 + 2xy + 2\epsilon y^4 \leq 2\epsilon(x^2 + y^2)^2 = 2\epsilon u^2$.
4. En déduire que l'intervalle de définition de la solution donnée par la question 2. contient $[t_0, t_0 + (2\epsilon \|(x, y)\|^2(t_0))^{-1}[$.
Sol. $u' \leq 2\epsilon u^2$ donne $-1/u(t) + 1/u(t_0) \leq 2\epsilon(t - t_0)$, donc $1/u(t) \geq 1/u(t_0) - 2\epsilon(t - t_0)$. Tant que $t < t_0 + (2\epsilon u(t_0))^{-1}$, $1/u$ est strictement positif donc $u(t)$ reste borné, donc la solution se prolonge au-delà de t.

Problème. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < a < b$.

(a) Trouver une paramétrisation $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ du cercle C de rayon a et de centre $(b, 0, 0)$ contenu dans le plan (xOz).
Sol. $f(t) = (b + a\cos t, 0, a\sin t)$ convient.

(b) On considère Σ la surface formée par la révolution complète de C autour de l'axe (Oz). Donner une paramétrisation $F : (t, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mapsto F(t, \theta) \in \mathbb{R}^3$ de Σ. On pourra utiliser la notation $\forall \theta \in [0, 2\pi], u_r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$.
Sol. L'image par la rotation d'angle θ et d'axe Oz de $(\rho, 0, z)$ est $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$, donc on peut choisir $F(t, \theta) = (b + a\cos t)u_r(\theta) + a\sin(t)\overrightarrow{k}$.

(c) pour tout couple $(t, 0)$, déterminer une équation du plan tangent à Σ en $F(t, 0)$.
Sol. On a $F'_t = -a\sin(t)u_r + a\cos(t)\overrightarrow{k}$ et $F'_\theta = (b + a\cos(t))u_\theta$, d'où $F'_t \wedge F'_\theta = (b + a\cos t)(-a\sin(t)\overrightarrow{k} - a\cos(t)u_r)$. Donc si $\theta = 0$, $\sin(t)\overrightarrow{k} + \cos(t)\overrightarrow{i}$ est un vecteur normal au plan tangent. Donc $M = (x, y, z) \in T_{F(t,\theta)}\Sigma \Leftrightarrow (x - b - a\cos t)\cos(t) + (z - a\sin t)\sin t = 0$, soit $(x - b)\cos t + z\sin t = a$.

(d) Calculer l'aire de Σ.
Sol. On a $\|F'_t \wedge F'_\theta\| = |b + a\cos(t)| \sqrt{a^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t)} = a(b + a\cos t)$ car $b + a\cos t \geq b - a \geq 0$. Par ailleurs, F est injective sur $]0, 2\pi[^2$, donc on en déduit $Aire(\Sigma) = \int_{[0,2\pi]^2} a(b + a\cos t)dtd\theta = 4\pi^2 ab$.

(e) Déterminer $N(t, \theta)$ le vecteur normal unitaire à Σ en $F(t, \theta)$ associé à F.
Sol. On a $N(t, \theta) = (F'_t \wedge F'_\theta)/\|F'_t \wedge F'_\theta\| = -\sin(t)\overrightarrow{k} - \cos(t)u_r$.

(f) En déduire la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base $B = (\frac{\partial F}{\partial t}(t, \theta), \frac{\partial F}{\partial \theta}(t, \theta))$, ainsi que la courbure de Gauss.
Sol. On a $N'_t = -\cos(t)\overrightarrow{k} + \sin(t)u_r$ ainsi que $N'_\theta = -\cos(t)u_\theta$, d'où

$$Mat(II, B) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -\cos(t)(b + a\cos t) \end{pmatrix}$$

La courbure de Gauss est donc $K = a\cos(t)(b + a\cos t)$.

(g) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la courbe $\gamma_n(t) = (b + a\cos t)u_r(nt) + a\sin(t)\overrightarrow{k}$. Montrer que $\gamma_n([0, 2\pi])$ est une courbe tracée sur Σ.
Sol. On a $\gamma_n(t) = F(t, nt) \in \Sigma$.

(h) Montrer que la longueur l_n de cette courbe vérifie $l_n \geq 2\pi n(b - a)$.
Sol. On a $Long(\gamma_n([0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} \|F'_t + nF'_\theta\| = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + n^2(b + a\cos t)^2}dt \geq 2\pi n(b - a)$.

(i) Soit $n = 0$. Déterminer pour tout t le plan osculateur à $\gamma_0(t)$.
Sol. La courbe est dans ce cas simplement le cercle C, qui est dans le plan $x0z$. Donc son plan oscullateur est ce plan-ci.