Université Joseph Fourier - L3 - Topologie 2016-2017

Contrôle continu 3

8 décembre 2016 - 2 heures

La qualité de la rédaction sera particulièrement importante pour la notation.

Exercice 1. Soit
$$A = \{\exp(in - \exp n), n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que $\{\exp(in), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans C le cercle unité. On pourra reproduire la démonstration faite en cours ou bien admettre le résultat suivant : pour tout $-1 \leq a < b \leq 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $a < \cos n < b$.
2. Déterminer $\bar{A} \subset (\mathbb{R}^2, us)$.

Exercice 2. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$, une application continue entre deux espaces topologiques non vides. On suppose que Y est séparé.

1. Montrer que les singletons de Y sont des fermés.
2. Si $\mathcal{T}$ est la topologie grossière, que peut-on dire de f ?
3. Si f est injective, montrer que X est séparé.
4. Si f est surjective, avec $card(Y) \geq 2$, X est-il toujours séparé ?

Exercice 3. Soit $f : X \to Y$ continue. Si X est connexe par arc, a-t-on $f(X)$ connexe par arc ?

Exercice 4. Soit cercle unité C dans $\mathbb{R}^2$, $X \subset C$ un ensemble non vide et fini de points de C, et $C' = C \setminus X$.

1. C' est-il compact ?
2. Est-il connexe ?

Exercice 6. Soit $A = \{M \in M(n, \mathbb{R}),\ |\det M| \leq 1\}$, et $M(n, \mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle.

1. A est-il connexe ?
2. A est-il un fermé de E ?
3. A est-il un ouvert de E ?
4. A est-il compact ?

Exercice 7. Soit $E = C^0([0,1], [-1,1])$ équipé de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$, et $A = \{f \in E, \exists a \in [0,1], f(a) = 0\}$.

1. A est-il un fermé pour la topologie induite ?
2. Déterminer $B = \{f \in E, \exists (f_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, f_n \to_n f\}$.
3. A est-il un compact de E ?
4. A est-il connexe ?