# Contrôle continu 3

# 6 décembre 2016 - 1 heure 30

*La qualité de la rédaction sera particulièrement importante pour la notation.*

**Question de cours.** Soit $(E, N)$ et $(F, N')$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Démontrer l'équivalence entre les deux propositions :

1. $f$ est continue sur $E$.
2. $f$ est lipschitzienne.

**Exercice 1.**

Soit $J = ]2\pi, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}^2 &(1)\\ t &\mapsto f(t) = \frac{2\pi}{t}(\cos t, \sin t) = \frac{2\pi}{t}e^{it}. &(2) \end{aligned}$$

On note $A = f(J)$. La topologie de $\mathbb{R}^2$ dans cet exercice est la topologie usuelle.

1. Dessiner sommairement $A$.
2. Montrer que $f$ est continue.
3. Déterminer $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de $A$ dans $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer $\bar{A}$ l'adhérence de $A$ dans $\mathbb{R}^2$.
5. $A$ est-il connexe par arc ? connexe ?
6. Pour tout $\theta \in ]0, 2\pi[$, soit $f_\theta = fe^{i\theta}$, et $A_\theta = f_\theta(\bar{J})$. Enfin, soit $B = \bar{B}(0, 1) \setminus (A \cup \{0\})$ et $C(0, 1)$ le cercle unité.

(a) Montrer que pour tout $\theta \in ]0, 2\pi[$, $A_\theta \cap A = \emptyset$.

(b) En déduire que

$$B = \cup_{\theta \in ]0,2\pi[} A_\theta \cup C(0,1).$$

(c) En déduire que $B$ est connexe. On admettra le résultat suivant : soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $(A_i)_I$ une famille de sous-ensembles connexes de $X$ telle qu'il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$, $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Alors $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe.

(d) En déduire que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe.

**Exercice 2.** Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$ (pour toute $f \in E$, $\|f\|_2 = (\int_0^1 f^2(x)dx)^{1/2}$).

1. Soit $D \subset [0,1]$ et $A = \{f \in E,\ f_{|D} = 0\}$.
   (a) Trouver $\overset{\circ}{A}$.
   (b) On suppose $D = \{0\}$. Trouver $\bar{A}$.
2. Soit $B = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1], f(x) \leq 0\}$. Que vaut $\bar{B}$ ?

**Exercice 3.** Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $T : E \to E$ l'application définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], (T(f))(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que $T$ est bien définie.
2. On munit $E$ de la norme $\| \|_\infty$. Montrer que $T$ est continue. Déterminer $|||T|||$.
3. On muni $E$ de la norme $\| \|_1$. Montrer que $T$ est continue. Déterminer $|||T|||$.