Université Joseph Fourier - L3 - Topologie 2016-2017

# CC 3 -CORRIGÉ

28 septembre 2016 - 2 heures

**Exercice 1.** Soit
$$A = \{\exp(in - \exp n), n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que $\{\exp(in), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $C$ le cercle unité. On pourra reproduire la démonstration faite en cours ou bien admettre le résultat suivant : pour tout $-1 \leq a < b \leq 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $a < \cos n < b$.
2. Déterminer $\bar{A} \subset (\mathbb{R}^2, us)$.

**Réponse. $e^{i\theta} \in \bar{A}$. Soit**

1. **Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. On a $\sin\theta = \phi(\cos\theta)$, où $\phi(X) = \pm\sqrt{1-X^2}$ (suivant le signe de $\sin\theta$) qui est continue en $X$ sur $[-1,1]$, donc uniformément continue par Heine. Donc $\exists \delta > 0$, qu'on peut choisir plus petit que $\epsilon$, tel que $|X - X'| \leq \delta$ implique $|\phi(X) - \phi(X')| \leq \epsilon$. Maintenant il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\cos\theta - \delta < \cos m < \cos\theta + \delta$. et donc $|\sin\theta - \sin p| \leq \epsilon$. Au total, $|e^{im} - e^{i\theta}| \leq 2\epsilon$, d'où le résultat.**
2. **Comme $A$ est discret, $\bar{A} \setminus A$ est formé par les valeurs d'adhérence $A_-$ de $(u_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $A^+$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$). On a $|u_n| = e^{-e^n}$ donc $u_n \to_{n\to+\infty} 0$, donc $\{0\} = A^+$. Montrons que $A^- = C$. On a $e^{-\exp n} \to_{n\to-\infty} 1$ (par valeurs négatives), donc d'une part $A^- \subset C$, d'autre part il existe $N \in \mathbb{Z}$, tel que $\forall n \leq N, |e^{-\exp n} - 1| \leq \epsilon$. Soit $u_n = \exp(in - \exp n) = e^{in}e^{-\exp n}$. Par la question 1. , il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $|e^{im} - e^{i\theta}| \leq \epsilon$. Si $p = -m - 2\pi N$, alors $p < N$, donc**
$$|u_p - e^{i\theta}| \leq |u_p - e^{-e^n}e^{i\theta}| + |e^{-e^n}e^{i\theta} - e^{i\theta}| \leq \epsilon e^{-e^n} + \epsilon \leq 2\epsilon.$$
**On a montré $C(0,1) \subset \bar{A}$. Au total, $\bar{A} = A \cup \{0\} \cup S^1$.**

**Exercice 2.** Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$, une application continue entre deux espaces topologiques non vides. On suppose que $Y$ est séparé.

1. Montrer que les singletons de $Y$ sont des fermés.
2. Si $\mathcal{T}$ est la topologie grossière, que peut-on dire de $f$ ?
3. Si $f$ est injective, montrer que $X$ est séparé.
4. Si $f$ est surjective, avec $card(Y) \geq 2$, $X$ est-il toujours séparé ?

**Réponse :**

1. **Soit $z \in Y$. Alors $V = \{z\}^c$ est ouvert. En effet, si $z' \neq z$, il existe un voisinage $U$ de $z$ ne rencontrant pas un ouvert de $z$, donc inclus dans $V$. Donc $V$ est ouvert.**
2. **Soit $x \in X$. Par la question précédente, $f^{-1}(\{f(x)\})$ est un fermé de $X$ et contient $x$, donc est non vide, donc est tout $X$, donc $f$ est constante.**
3. **Soient $x \neq y$ dans $X$. Alors puisque $f(x) \neq f(y)$ car $f$ est injective, il existe $U \ni f(x)$ et $V \ni f(y)$ deux ouverts disjoints de $Y$, car $Y$ est séparé. Comme $f$ est continue, $f^{(-1)}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont deux ouverts de $X$, qui sont disjoints et contiennent chacun $x$ et $y$ respectivement. Donc $X$ est séparé.**
4. **Non. Soit $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$ muni de la topologie discète (donc $Y$ est séparé), et $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) = 1$. Choisissons comme topologie de $X$ $\mathcal{T} = \{f^{-1}(0) = \{a, b\}, f^{-1}(1) = \{c\}, \emptyset, X\}$. $X$ n'est pas séparé car $a$ et $b$ ne le sont pas, mais $f$ est automatiquement continue par construction. Et $f$ est bien surjective.**

**Exercice 3.** Soit $f : X \to Y$ continue. Si $X$ est connexe par arc, a-t-on $f(X)$ connexe par arc ?

**Réponse. Oui. Soient $z, z' \in f(X)$. Alors il existe $x, x'$ dans $X$, $f(x) = z$ et $f(x') = z'$. Il existe $g : [0,1] \to X$ continue telle que $g(0) = x$ et $g(1) = x'$, donc $f \circ g : [0,1] \to Y$ est d'une part en fait à valeurs dans $f(X)$, d'autre part continue, et enfin relie $z$ à $z'$, donc $f(X)$ est connexe par arc.**

**Exercice 4.** Soit cercle unité $C$ dans $\mathbb{R}^2$, $X \subset C$ un ensemble non vide et fini de points de $C$, et $C' = C \setminus X$.

1. $C'$ est-il compact ?
2. Est-il connexe ?

**Réponse.**

1. **Soit $X = \{x_1, \cdots, x_p\} \subset C$ cet ensemble et $C' = C \setminus X$. Montrons que pour $\epsilon > 0$ assez petit, $B(x_1, \epsilon) \cap C' \neq \emptyset$, ce qui montre que $\mathbb{R}^2 - C'$ n'est pas ouvert, donc $C'$ non fermé donc non compact. Soit $\delta = \inf_{i \neq j}\{d(x_i, x_j)\}$, et fixons $\epsilon < \delta$. On peut écrire pour tout $1 \leq i \leq p$, $x_i = e^{i\theta_i}$ avec $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_p < \theta_1 + 2\pi$. On a $\lim_{\theta \to \theta_1} e^{i\theta} \to x_1$ par continuité de l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ donc pour $\theta \neq \theta_1$ assez petit, $x = e^{i\theta}$ est dans $B(x_1, \epsilon)$ et différent des autres points de $X$ car $\epsilon < \delta$. On a montré que $C'$ n'est jamais fermé donc jamais compact.**
2. **Si $p = 1$, $C'$ est connexe. En effet, l'application $\phi : \exp(i\cdot) : \theta \in I = ]\theta_1, \theta_1 + 2\pi[ \to C$ est continue, définie sur un intervalle $I$ connexe, et $f(I) = C'$, donc $C'$ est connexe. Si $p \geq 2$, Notons d'abord qu'une droite coupe $C$ en au plus deux points. En effet, on peut remplacer $x$ par une fonction affine de $y$ (ou l'inverse) dans $x^2 + y^2 = 1$, ce qui donne une équation de degré deux en $x$. Soit $k(x, y) = 0$ une équation d'une droite $D$ passant par $x_1$ et $x_2$. Comme $C' \cap D = \{x_1, x_2\}$, $C' = (\{k > 0\} \cap C') \cup (\{k < 0\} \cap C')$ qui est une réunion de deux ouverts de $C'$, car $k$ est affine donc continue et $\mathbb{R}_*^+$ (resp. $\mathbb{R}_*^-$) un ouvert, donc $C'$ est non connexe.**

**Exercice 6.** Soit $A = \{M \in M(n, \mathbb{R}), \ |\det M| \leq 1\}$, et $M(n, \mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle.

1. $A$ est-il connexe ?
2. $A$ est-il un fermé de $E$ ?
3. $A$ est-il un ouvert de $E$ ?
4. $A$ est-il compact ?

**Réponse.**

1. $A$ est connexe par arc (en fait étoilé). En effet, pour tout $t \in [0,1]$ et $M \in A$, $|\det(tM)| = t^n |\det M| \leq 1$, donc $[0, M] \subset A$. De plus l'application $t \mapsto tM$ est continue car linéaire.
2. L'application $\phi : M \mapsto |\det M|$ est continue car $x \mapsto |x|$ l'est et $M \mapsto \det M$ aussi car fonction polynomiale en les coefficients de $M$. De plus, $[1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc $A = \phi^{-1}(I)$ est fermé.
3. De plus $A$ n'est pas ouvert, car $M_k = I_n(1 + 1/k)$ tend vers $I_n$ mais $|\det M_k| = (1 + 1/k)^n > 1$, donc toute boule centrée sur $I_n$ rencontre $A^c$.
4. Pour $n = 1$, $A = [-1, 1]$ qui est compact dans $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, et $k \geq 1$, soit $M_k = (k, 0, \cdots, 0)$ est de déterminant nul donc $M_k \in A$, mais $\|M_k\|_\infty = \max(|m_{ij}|) \to_{k \to \infty} +\infty$ donc $A$ n'est pas bornée donc non compact.

**Exercice 7.** Soit $E = C^0([0,1], [-1,1])$ équipé de la topologie induite par la norme $\| \cdot \|_\infty$, et $A = \{f \in E, \exists a \in [0,1], f(a) = 0\}$.

1. $A$ est-il un fermé pour la topologie induite ?
2. Déterminer $B = \{f \in E, \exists (f_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, f_n \to_n f\}$.
3. $A$ est-il un compact de $E$ ?

4. $A$ est-il connexe ?

**Réponse.**

1. $A^c = \{f \in E, \forall a \in [0,1], f(a) \neq 0\}$. **Soit** $f \in A$. $f$ **est continue sur un intervalle, donc par le TVI,** $f > 0$ **ou** $f < 0$. **Supposons** $f > 0$. $f$ **est continue sur un compact, donc atteint son inf en** $a_0 \in [0,1]$**, soit** $f \geq f(a_0) > 0$. **La boule** $B = B(f, f(a_0)/2)$ **est dans** $A$ **car** $g \in B$ **implique** $\forall x \in [0,1], g(x) = f(x)+(g(x)-f(x)) \geq f(a_0)-\|g-f\|_\infty \geq f(a_0)/2 > 0$. **Donc** $A^c$ **est ouvert et** $A$ **fermé.**
2. **Dans un espace métrique (donc en particulier dans un espace vectoriel normé), l'adhérence de** $A$ **est exactement l'ensemble des limites de suites de** $A$**, en l'occurrence** $B$. **Donc** $B \subset \bar{A} = A$ **car** $A$ **est fermé.**
3. **Soit pour tout** $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$. $\forall n \geq 1$, $f_n \in A$ **car** $f_n(0) = 0$. **Mais si une sous-suite** $f_{\phi(n)}$ **converge vers** $f$**, c'est vers** $f = 0$ **sur** $[0,1[$ **et** $f(1) = 1$ **qui n'est pas continue, donc** $A$ **n'est pas compact.**
4. **Pour tout** $f \in A$, $[0,f] \subset A$**, donc** $A$ **est connexe par arc.**