Université Joseph Fourier - L3 - Topologie 2017-2018

Contrôle continu 3

6 décembre 2016 - 1 heure 30

La qualité de la rédaction sera particulièrement importante pour la notation.

Question de cours. Soit (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Démontrer l'équivalence entre les deux propositions :

1. f est continue sur E.
2. f est lipschitzienne.

Solution. Si f est continue elle est continue en 0, donc il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in E$ avec $N(x) \leq \delta$, $N'(f(x) - f(0)) = N'(f(x)) \leq 1$. Donc pour tout $x \neq y$, $N'(f(\delta(x-y)/N(x-y))) \leq 1$, soit par linéarité, $N'(f(x) - f(y)) \leq N(x-y)/\delta$, donc f est lipschitzienne.
Réciproquement, soit $\epsilon > 0$ et $x \in E$. Il existe $k \geq 0$, tel que pour tout x, y, $N'(f(x-y)) \leq kN(x-y)$. Donc si $kN(x-y) \leq \epsilon$, soit $N(x-y) \leq \epsilon/k$, on a $N'(f(x-y)) \leq \epsilon$, donc f est continue en x, donc continue.

Exercice 1.
Soit $J =]2\pi, +\infty[$ et

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$t \mapsto f(t) = \frac{2\pi}{t}(\cos t, \sin t) = \frac{2\pi}{t} e^{it}. \tag{2}$$

On note $A = f(J)$. La topologie de $\mathbb{R}^2$ dans cet exercice est la topologie usuelle.

1. Dessiner sommairement A.
2. Montrer que f est continue.
   Réponse. $\cos t$, $\sin t$ et $1/t$ sont C^0 sur $\mathbb{R}^*$, donc par produit de fonctions continues, les composantes de f le sont, donc f aussi.
3. Déterminer $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A dans $\mathbb{R}^2$.
   Réponse. Soit $t \in J$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = 2\pi(1/t + 1/n)$ et $z_n = r_n e^{it}$. Pour n assez grand, $z_n \notin A$. En effet s'il existe $t' > 2\pi$, tel que $z_n = \gamma(t')$, alors $r_n = 1/t'$ (par passage aux modules), soit $t' = t/(1 + t/n)$ et $t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$ (par égalité des arguments). Puisque $t/(1 + t/n) \to_n t$, pour n assez grand, $|t' - t| < 2\pi$, donc $t = t'$ ce qui est impossible par la première équation. Donc $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
4. Déterminer $\bar{A}$ l'adhérence de A dans $\mathbb{R}^2$.
   Réponse. La topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$ est induite par une métrique, donc on peut utiliser la définition séquentielle de l'adhérence des sous-ensembles. Soit $(z_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant dans $\mathbb{R}^2$ vers z. Alors il existe une suite $t_n \in [1, \infty[^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $z_n = f(t_n)$. Si $t_n \to \infty$, alors $z_n \to 0$. Sinon, il existe une sous-suite $(t_{\phi(n)})_n$ de $(t_n)_n$ convergeant vers $T \in \mathbb{R}$ donc $T \geq 2\pi$ par passage à la limite, et par continuité de f sur $[2\pi, +\infty[$, $z_{\phi(n)} \to f(T)$, donc $z = f(T)$. Si $T > 2\pi$, $z \in A$, sinon $z = 1$. Au total, $\bar{A} \subset A \cup \{0\} \cup \{1\}$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $A \ni f(n) \to 0$ donc $0 \in \bar{A}$ et $A \ni f(2\pi + 1/n) \to 1$, donc $\bar{A} = A \cup \{0\} \cup \{1\}$.
5. A est-il connexe par arc ? connexe ?
   Réponse. A est l'image par une fonction continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$, donc connexe par arc, donc par le cours l'image est connexe par arc, donc connexe.
6. Pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, soit $f_\theta = fe^{i\theta}$, et $A_\theta = f_\theta(\bar{J})$. Enfin, soit $B = \bar{B}(0,1) \setminus (A \cup \{0\})$ et $C(0,1)$ le cercle unité.

(a) Montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, $A_\theta \cap A = \emptyset$.

(b) En déduire que
$$B = \cup_{\theta\in]0,2\pi[} A_\theta \cup C(0, 1).$$

(c) En déduire que B est connexe. On admettra le résultat suivant : soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $(A_i)_I$ une famille de sous-ensembles connexes de X telle qu'il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$, $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Alors $\cup_{i\in I} A_i$ est connexe.

(d) En déduire que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe.

Réponse.

(a) Soit $z \in A_\theta \cap A$. Alors il existe t', t tels que $e^{it}/t = e^{it'+\theta}/t'$, donc $t = t'$ au passage au module et $t - t' = \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est impossible car $\theta \in]0, 2\pi[$.

(b) La réunion des A_θ est dans B par la question précédente, et $C(0, 1) \subset \bar{B}(0, 1)$ implique $C(0, 1) \subset B$ car $A \cap C(0, 1) = \emptyset$. Montrons l'inclusion inverse : soit $z \in B$, $t = 2\pi/|z| \in [2\pi, \infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $e^{it+i\theta} = z/|z|$. On a donc $z = \frac{2\pi}{t} e^{i\theta+it} \in A_\theta$. Si $\theta = 0$, alors ou bien $|z| < 1$ et alors $z \in A$, ce qui est impossible, ou bien $z \in C(0, 1)$. Donc $z \in A_\theta \cup C(0, 1)$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.

(c) Comme $C(0, 1)$ est connexe par arc par le cours, que A_θ est connexe par arc comme image par une fonction continue d'un intervalle ($[2\pi, \infty[$), et que pour tout θ, $A_\theta \cap C(0, 1) \neq \emptyset$, $\cup A_\theta$ est connexe. Donc B est la réunion de deux connexes qui s'intersectent, donc par le cours B est encore connexe.

(d) Par le cours, puisque $B \subset B \cup \{0\} \subset \bar{B}$ car 0 est dans l'adhérence de toute spirale $f_\theta(J)$, $B \cup \{0\}$ est connexe. Ensuite, montrons que $B' = \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$ est connexe par arc. Pour tout $x \in B'$ le segment $[x, x/\|x\|]$ définit un chemin entre x et le $C(0, 1)$, qui est connexe par arc, donc B' l'est. Enfin, $\mathbb{R}^2 \setminus A = (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)) \cup (B \cup \{0\})$, chacune de ces deux parties est connexes et les deux s'intersectent en une partie non vide, le cercle, donc la réunion est connexe.

Exercice 2. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ (pour toute $f \in E$, $\|f\|_2 = (\int_0^1 f^2(x)dx)^{1/2}$).

1. Soit $D \subset [0, 1]$ et $A = \{f \in E,\ f_{|D} = 0\}$.
   (a) Trouver $\overset{\circ}{A}$.
   (b) On suppose $D = \{0\}$. Trouver $\bar{A}$.
2. Soit $B = \{f \in E,\ \forall x \in [0, 1], f(x) \leq 0\}$. Que vaut $\bar{B}$?

Solution.

1. (a) Si $D = \emptyset$, $A = E$, donc $A = \overset{\circ}{A} = \bar{A} = E$. Si $D \neq \emptyset$, soit $f \in A$. La suite de fonctions $(f_n)_n := (f + 1/n)_n$ converge vers f pour $\|\|_1$. En effet, pour tout n, $\|f_n - f\|_2 = 1/n^{3/2} \to 0$. Mais $f_{n|D} = 1/n > 0$ donc $f_n \notin A$, ce qui prouve que $f \in \overline{A^c}$, donc $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
   (b) On a $E = \bar{A}$. En effet soit $f \in E$, et pour tout entier $n \geq 1$, $f_n = nxf(1/n)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n = f$ sur $[1/n, 1]$. Pour tout n f_n est continue par construction, et f_n est dans A car $f_n(0) = 0$. De plus $\|f_n - f\|_2 = (\int_0^{1/n} |nxf(1/n) - f(x)|^2 dx)^{1/2}$. f est C^0 sur un compact, donc sa valeur absolue est bornée par M, donc puisque $0 \leq nx \leq 1$ sur $[0, 1/n]$, $\|f_n - f\|_2 \leq \sqrt{2}M/\sqrt{n} \to 0$. Donc $f \in \bar{A}$.
2. Montrons que $\bar{B} = B$. Comme $\|\|_2$ est une norme, on peut utiliser la définition séquentielle de l'adhérence. Soit $f \in \bar{B}$. Il existe donc une suite $(f_n)_n$ dans B convergeant vers f. Supposons que $f \notin B$. Alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) > 0$. Par continuité de f il existe un intervalle I d'intérieur non vide contenant x tel que $f(y) > f(x)/2$. Mais alors pour tout n $\|f_n - f\|_2 \geq (\int_I |f_n - f|^2(y)dy)^{1/2} \geq (Long(I))^{1/2} f(x)/2$, donc $\|f_n - f\|_2$ ne tend pas vers 0. Donc $f \in B$ et $\bar{B} = B$. (On peut par ailleurs montrer que $\overset{\circ}{B} = \emptyset$.)

Exercice 3. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et $T : E \to E$ l'application définie par
$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], (T(f))(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que T est bien définie.
   Réponse. $T(f)$ est une primitive de f. Comme f est C^0, $T(f)$ est C^1 donc C^0.
2. On muni E de la norme $\|\|_\infty$. Montrer que T est continue. Déterminer $\||T\||$.
   Réponse. Pour tout $x \in [0,1]$ et $f \in E$, $|T(f)(x)| \leq \int_0^x \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty$. T est $1-$lipschitzienne et linéaire, donc continue sur E, et par conséquent $\||T\|| \leq 1$. De plus $T(1)(x) = x$ donc $\|T(1)\|_\infty = T(1)(1) = 1 = \|1\|_\infty$. Donc $\||T\|| = 1$.
3. On muni E de la norme $\|\|_1$.
   Montrer que T est continue, et déterminer sa norme.
   Réponse. Pour toute $f \in E$,

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_1 &= \int_0^1 |T(f)(x)|dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|dtdx \\ &\leq |\int_0^1 \int_0^1 |f(t)|dtdx = \|f\|_1.\end{aligned}$$

   Donc T est $1-$lipschitzienne, donc C^0, et $\||T\|| \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n = n - xn^2$ sur $[0, 1/n]$ et 0 sinon. On a $\|f_n\|_1 = 1/2$. De plus $Tf_n(x) = nx - x^2n^2/2$ sur $[0, 1/n]$ et $1/2$ sinon. Par ailleurs Tf_n est croissante, donc $0 \leq Tf_n \leq 1/2$, donc $\|Tf_n - 1/2\|_1 \leq 1/(2n)$, et donc $\|Tf_n\|_1 \to_n 1/2$. Donc $\||T\|| = 1$.