DS3, Unité d'Enseignement MAT114
Mardi 2 décembre 2014, durée 1h30

1. **Question de cours**
   (a) Montrer en utilisant seulement la définition du cours que si $\lim_{x\to -1} f = 2$, alors $\frac{1}{2}f$ tend vers 1 quand x tend vers -1. Réponse : Soit $\epsilon > 0$ fixé. D'après la définition de la limite, $\exists \delta$ tel que $|x+1| \leq \delta$ et $x \neq -1$, implique $|f(x) - 2| \leq \epsilon$, soit $|f/2(x) - 1| \leq \epsilon/2 \leq \epsilon$, donc $f/2 \to_{x\to -1} 1$.

2. **Déterminer les limites suivantes**
   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^3)}{x^3}$. Réponse : on a $|\sin(x^3)/x^3| \leq 1/x^3$ pour $x > 0$. Or $1/x^3$ tend vers 0 quand $x \to \infty$, d'où $f \to_{+\infty} 0$.
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2e^x)+3\sqrt{x}}{4x}$. Réponse : $f(x) = \ln 2/(4x) + x/(4x) + 3/(4\sqrt{x})$ pour $x > 0$. Le premier et le dernier terme tendent vers 0 en $+\infty$ et le second vers $1/4$.
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{7\sin(4x^2)}$. Réponse : $f(x) = \frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2}\frac{2x^2}{4x^2}\frac{4x^2}{7\sin(4x^2)}$. Puisque $\ln(1+u)/u \to_{u\to 0} 1$ et $\sin u/u \to_{u\to 0} 1$, et que $2x^2 \to_{x\to 0} 0$ ainsi que $4x^2$, on obtient $f(x) \to_{x\to 0} 1/28$.
   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^2-1}$. Réponse : on fait $u = x-1$, d'où $f(x) = e(e^u - 1)/u(u+2) \to_{u\to 0} e/2$ par le cours.
   (e) $\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2x^2}}$. Réponse : On a $f(x) = \exp(\frac{1}{2x^2}\ln(1+\sin^2 x)) = \exp(\frac{\sin^2 x}{2x^2}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x})$ (pour x assez proche et différente de 0, $\sin^2 x \neq 0$. La première fraction dans l'exponentielle tend vers $1/2$ quand x tend vers 0, la seconde vers 1, car x^2 et $\sin^2 x$ tendent vers zéro, donc par continuité de la fonction exp en $1/2$, $f(x) \to_{x\to 0} e^{1/2}$.
   (f) $\lim_{x\to+\infty}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2x^2}}$. Réponse : $0 \leq \ln(1+\sin^2 x) \leq \ln 2$, donc l'intérieur de l'exponentielle est borné par $\ln 2/(2x^2)$, donc tend vers zéro. Par continuité de exp, $f(x) \to_{x\to+\infty} 1$.

3. **Soient $a \in \mathbb{R}$ et T_a la tangente en (a, a^2) au graphe de la fonction x^2 sur $\mathbb{R}$.**
   (a) Donner une équation implicite de T_a. Réponse : on a $(x, y) \in T_a$ équivalent à $y - a^2 = 2a(x - a)$.
   (b) Pour quel(s) $a \in \mathbb{R}$ la droite T_a est-elle parallèle à la droite $y = x$? Réponse : c'est équivalent à $(1, 2a)$ colinéaire à $(1, 1)$, soit $a = 1/2$.
   (c) Pour quel(s) $a \in \mathbb{R}$ la droite T_a passe-t-elle par le point $(1, 0)$? Réponse : On a $0 - a^2 = 2a(1 - a)$, soit $a^2 = 2a$, donc $a = 0$ (la tangente est l'axe (Ox)) ou $a = 2$.

4. **Déterminer l'ensemble de définition, le domaine de dérivation et la dérivée de f.**

(a) $f(x) = \ln(\exp(x^2) - 2)$. Réponse : $x \in D_f$ ssi $e^{x^2} > 2$, soit $x^2 > \ln 2$, d'où $D_f = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{\ln 2}, +\sqrt{\ln 2}]$. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\exp(x^2) - 2 > 0$ si $x \in D_f$. De plus $e^{x^2} - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur D_f. Au total, la composition est dérivable sur D_f. La dérivée est $f'(x) = 2xe^{x^2}/(e^{x^2} - 2)$.

(b) $g(x) = \tan(e^x)$ avec $x \in J =]-\infty, \ln \pi]$. Réponse : $x \in D_g$ ssi $e^x \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. Puisque $e^x > 0$, et $e^x \leq \pi$ sur J, $D_g = J \setminus \{\ln(\pi/2)\}$. e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$, et si $x \in D_g$, e^x est dans l'ensemble de définition de $\tan x$ qui est aussi son ensemble de dérivabilité. Donc g est dérivable sur D_g, et de dérivée $e^x / \cos^2(e^x)$.

5. **Calculer les intégrales suivantes**

(a) $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)dx$. Réponse : on a $\cos^3 x = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix})$ ce qu vaut $\frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$. Donc une primitive est $\frac{1}{4}(\frac{1}{3}\sin(3x) + 3\sin(x))$, et l'intégrale vaut $\frac{1}{4}(\frac{1}{3}(-1) + 3) = 2/3$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e x^n \ln x dx$ (on pourra effectuer une intégration par parties). Montrer de deux manières que cette intégrale est strictement positive. Réponse : On a $I_n = [\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{n+1}x^{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n+1}e^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}[x^{n+1}]_1^e = \frac{1}{n+1}e^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}(e^{n+1} - 1) = \frac{1}{(n+1)^2}(ne^{n+1} + 1)$. C'est plus grand que $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Par ailleurs, on a une intégrale d'une fonction continue positive non nulle entre deux bornes différentes, donc l'intégrale devait être positive.

(c) Calculer $\int_1^2 \frac{4dt}{t(4+t)}$.En effectuant un changement de variable, en déduire $\int_0^{\ln 2} \frac{4}{4+e^x}dx$. Réponse : $\frac{4}{t(4+t)} = 1/(t) - 1/(4+t)$,, d'oú l'intégrale vaut $[\ln |t/(4+t)]_1^2 = \ln(5/3)$. Ensuite, on fait $t = e^x$, d'où $dt = e^x dx$, et l'intégrale devient $\int_0^{\ln 2} \frac{4e^x}{e^x(4+e^x)}dx = \int_0^{\ln 2} \frac{4}{(4+e^x)}dx$, qui vaut donc $\ln(5/3)$.

6. **Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on note $I(p,q)$ l'intégrale $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.**

(a) Calculer $I(p, 0)$ pour tout p. Réponse : $I(p,0) = [\frac{x^{p+1}}{p+1}]_0^1 = 1/(p+1)$.

(b) Donner une relation très simple entre $I(p,q)$ et $I(q,p)$ (on pourra effectuer un changement de variable).

(c) Pour $q \geq 1$, donner une relation simple entre $I(p,q)$ et $I(p+1, q-1)$ (on pourra effectuer une intégration par parties). Réponse : On a $I(p,q) = [\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q]_0^1 + \int_0^1 \frac{qx^{p+1}}{p+1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{q}{p+1}I(p+1, q-1)$ car $q > 0$.

(d) Montrer par récurrence sur q et en utilisant la question 6c que pour tout p, $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q, 0)$. Réponse : c'est vrai pour $q = 0$ car $\frac{p!0!}{(p+0)!}I(p+0,0) = I(p,0)$. Si c'est vrai pour $q \geq 0$, on a $I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1}I(p+1, q)$ par la question précédente, donc c'est $\frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!}I(p+1+q, 0) = \frac{p!(q+1)!}{(p+(q+1))!}I(p+(q+1), 0)$, et la récurrence est démontrée.