Devoir surveillé - 15 mars 2018 de 8h-10h

Questions de cours.

1. **Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x_0 un réel fixé.**
   (a) **Donner la définition de f continue en x_0 :** pour $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
   (b) **Montrer, en utilisant seulement la définition avec les ϵ, que si f et g sont continues en x_0 alors $f+2g$ est continue en x_0 :** Soit ϵ. f est continue donc il existe η_1 tel que si $|x - x_0| < \eta_1$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3$. g est continue donc il existe η_2 tel que si $|x - x_0| < \eta_2$ alors $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon/3$. Ainsi, si $|x - x_0| < \min\{\eta_1, \eta_2\}$ alors

   $$|(f(x) + 2g(x)) - (f(x_0) + 2g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + 2|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

   la première inégalité étant obtenue par inégalité triangulaire. On a bien démontré la continuité de $f + 2g$ en x_0.
2. **Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires :** Soit f un fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors l'image de $[a, b]$ par f est un intervalle et en particulier toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes.
3. **Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. Montrer que $exp(u_n)$ est équivalent à $exp(v_n)$ si et seulement si $u_n - v_n$ tend vers 0 :** Ces deux suites ne s'annulant pas, on peut prendre le critère de la limite du rapport de ces deux suites : $exp(u_n)$ est équivalent à $exp(v_n)$ si et seulement si $\frac{exp(u_n)}{exp(v_n)}$ tend vers 1 c'est-à-dire si et seulement si $exp(u_n - v_n)$ tend vers 1 ce qui est équivalent à $u_n - v_n$ tend vers 0.

Exercice 1. Montrer qu'une suite décroissante dont une suite extraite converge (vers une limite finie) est convergente (vers une limite finie). Soit (u_n) une telle suite et φ une extraction qui correspond à une sous-suite qui converge vers une limite ℓ. La suite extraite est elle aussi décroissante et converge vers ℓ donc pour tout n, $u_{\varphi(n)} \geq \ell$. Mais comme $\varphi(n) \geq n$ on a aussi $u_n \geq u_{\varphi(n)} \geq \ell$ pour tout n ce qui implique que la suite (u_n) est minorée par ℓ. Or (u_n) décroit donc elle converge. Et comme ℓ est la limite d'une de ses sous-suites, ℓ est la limite de (u_n).

Exercice 2.

1.
$$\frac{(n+1)(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-5})}{\sqrt{n}} = \frac{(n+1)8}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n-5})\sqrt{n}} \sim \frac{8n}{2\sqrt{n}\sqrt{n}} \sim 4$$

   donc $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5})}{\sqrt{n}} = 4$.

$$\frac{\tan(x) + \sin(x)\cos(x)}{x} = \frac{\tan(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x}\cos(x) \to 1 + 1 \times 1 = 2 \text{ en } 0.$$

   donc $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)+\sin(x)\cos(x)}{x} = 2$.

$$x^{3\sqrt{x}} = exp(3x^{\frac{1}{2}}\ln(x)). \text{ Or } \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\ln(x) = 0$$

   donc $\lim_{x\to 0^+} x^{3\sqrt{x}} = 1$.

2. **Montrer les équivalences suivantes en 0 :**

$$\ln(e^x + x) = \ln(e^x) + \ln(1 + xe^{-x}) = x + xe^{-x}\frac{\ln(1 + xe^{-x})}{xe^{-x}} = x(1 + e^{-x}\frac{\ln(1 + xe^{-x})}{xe^{-x}}).$$

$e^{-x}\frac{\ln(1+xe^{-x})}{xe^{-x}}$ tend vers 1 en 0 car $\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Donc $(1 + e^{-x}\frac{\ln(1+xe^{-x})}{xe^{-x}})$ tend vers 2 en 0 et $\ln(e^x + x) \sim 2x$.

$$\frac{\sin(x)\ln(1 + x^2)}{\sqrt{1 + x} - 1} = \frac{\sin(x)\ln(1 + x^2)(\sqrt{1 + x} + 1)}{x} \sim \frac{x\ln(1 + x^2)2}{x} \sim 2x^2$$

car $\ln(1 + u) \sim u$ en 0.

3. **Trouver un équivalent simple de** $exp(\frac{ne^{n+1}}{e^n + n}+1)$**.** On note $u_n = \frac{ne^{n+1}}{e^n+n}+1$ et $v_n = 1+ne$.

$$u_n - v_n = \frac{ne^{n+1}}{e^n + n} - ne = ne(\frac{e^n}{e^n + n} - 1) = ne(\frac{-n}{e^n + n}) = \frac{-en^2}{e^n + n} \to 0,$$

donc, d'après le point 3 des questions de cours, $exp(\frac{ne^{n+1}}{e^n+n} + 1) \sim exp(1 + ne)$

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ **en posant** $x_0 = 0$ **et** $x_{n+1} = f(x_n)$ **pour** $n \in \mathbb{N}$.

1. **Montrer que l'équation** $x^3 - 3x + 1 = 0$ **possède une solution unique** α **dans l'intervalle** $]0, 1/2[$. Si on note $P(x) = x^3 - 3x + 1$ alors P est un polynôme de degré 3 donc il s'annule au plus trois fois. Sa limite en $-\infty$ est $-\infty$ et sa valeur en 0 est 1 donc, grâce au théorème des valeurs intermédiaires il a au moins une racine inférieure stricte à 0. Sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ et sa valeur en $1/2$ vaut $-3/8$ donc P a au moins une racine strictement supérieure à $1/2$. Il ne peut donc pas avoir plus d'une racine entre 0 et $1/2$. Or $P(0)$ et $P(1/2)$ sont de signes différents, il y a donc exactement une racine dans $]0, 1/2[$. On l'appelle α.
2. **Montrer que l'équation** $f(x) = x$ **est équivalente à l'équation** $x^3 - 3x + 1 = 0$ **et en déduire que** α **est l'unique solution de l'équation** $f(x) = x$ **dans l'intervalle** $[0, 1/2]$. $f(x) = x$ est équivalent à $f(x) - x = 0$ qui est équivalent à $\frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} - x = 0$ soit $\frac{x^3-3x+1}{9} = 0$ et donc $x^3 - 3x + 1 = 0$. Ainsi les solutions de $f(x) = x$ dans $[0, 1/2]$ sont les solutions de $P(x) = 0$ dans $[0, 1/2]$ ce qui prouve qu'il n'y en a qu'une et que c'est α.
3. **Montrer que la fonction** f **est croissante sur** $\mathbb{R}^+$ **et que** $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$**. En déduire que la suite** (x_n) **est croissante.** f est une somme de fonctions croissantes et positives sur $\mathbb{R}^+$, c'est donc une fonction croissante et positive sur $\mathbb{R}^+$. f est croissante donc (x_n) est monotone. $x_0 = 0 < \frac{1}{9} = x_1$ donc x_n est croissante.
4. **Montrer que** $f(1/2) < 1/2$ **et en déduire que** $0 \leq x_n < 1/2$ **pour tout** $n \geq 0$. $P(1/2) < 0$ donc $f(1/2) < 1/2$. Ainsi comme $f(0) > 0$ et f croissante sur $[0, 1/2]$, on en déduit que $[0, 1/2]$ est stable par f et donc que la suite (x_n), qui vérifie $x_0 \in [0, 1/2]$, est bornée, minorée par 0 et majorée par $1/2$.
5. **Montrer que la suite** $(x_n)_{n\geq 0}$ **converge vers** α.. La suite (x_n) est bornée et croissante donc elle converge vers un point fixe de f (car f est continue) dans l'intervalle $[0, 1/2]$. Comme α est le seul point fixe de f dans $[0, 1/2]$ on en déduit que la suite converge vers α.

Exercice 4.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$. La fonction g est continue sur l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$. $g(a) + g(\frac{a+b}{2}) = 0$. Soit $g(a)$ est nulle et on conclut. Soit $g(a)$ et $g(\frac{a+b}{2})$ sont de signe contraire et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $g(x) = 0$.

***Application :* une personne parcourt 4 km en 1 heure pas forcément à vitesse constante. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.** On note h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(t)$ est le nombre de kilomètres parcourus au temps t et $f(t) = h(t) - 4t.f(0) = f(1) = 0$. On note g la fonction définie par $g(t) = f(t + 0.5) - f(t)$ définie sur l'intervalle $[0, 0.5]$. D'après ce qu'on a démontré ci-dessus, il existe x tel que $g(x) = 0$ soit $f(x+0.5) - f(x) = 0$ soit $(h(x+0.5) - 4(x+0.5)) - (h(x) - 4x) = 0$ soit encore $h(x+0.5) - h(x) = 2$ ce qui se traduit par la personne a parcouru 2 km entre l'instant x et l'instant $x + 0.5$ soit sur un intervalle de temps de 30 minutes.