Devoir surveillé - 15 mars 2018 de 8h-10h

Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur. Toute réponse doit être expliquée, . *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Questions de cours.

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x_0 un réel fixé.
   (a) Donner la définition de f continue en x_0.
   (b) Montrer, en utilisant seulement la définition avec les ϵ, que si f et g sont continues en x_0 alors $f + 2g$ est continue en x_0.
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires
3. Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. Montrer que $exp(u_n)$ est équivalent à $exp(v_n)$ si et seulement si $(u_n - v_n)_n$ tend vers 0.

Exercice 1. Montrer qu'une suite décroissante dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 2.

1. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5})}{\sqrt{n}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)+\sin(x)\cos(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{3\sqrt{x}}.$$
2. Montrer les équivalences suivantes en 0 :
$$\ln(e^x + x) \sim 2x, \qquad \frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x}-1} \sim 2x^2.$$
3. Trouver un équivalent simple de $exp(\dfrac{ne^{n+1}}{e^n+n}+1)$.

Exercice 3.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$
et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Exercice 4.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure pas forcément à vitesse constante. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.