Université Grenoble Alpes — **Année 2023-2024**

Licence de mathématiques, 3e année — **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 2
2 avril 2024

Exercice 1 On considère le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ qui est défini par

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 3y^2 - x^3 - x^2 + x - 2 = 0\} .$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une équation définissant la droite affine $\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{E}$ au point $(-1,1)$.
3. Trouver (a,b) sur $\mathcal{E}$ tel que $(a,b) \in (E \cap \mathcal{D})\backslash\{(-1,1)\}$.
4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $\mathcal{O}$ contenant 0 et une fonction différentiable $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $(\varphi(y), y)$ appartient à $\mathcal{E}$ pour tout y dans $\mathcal{O}$. (Indication : Utiliser $(-2,0) \in \mathcal{E}$.)
5. Calculer $\varphi'(0)$.
6. (Bonus) Donner le développement à l'ordre 2 en 0 de φ.

Exercice 2 Soient Σ_1 et Σ_2 les surfaces de $\mathbb{R}^3$ données par

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y^2 - z^2 = 2\},$$
$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y^2 + z^2 = 1\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est compact.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-variété.
3. Trouver un ensemble d'au plus 8 points de $\mathcal{C}$ contenant tous les extrema locaux de la fonction $\mathcal{C} \ni (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + y^2$.
4. Calculer les distances à l'origine des points les plus proches et les plus éloignés (de l'origine) sur $\mathcal{C} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-y)e^{-(x^2+y^2)/4}$.

1. Montrer que $f(x,y) \to 0$ pour $\|(x,y)\| \to \infty$.
2. Montrer que $\inf(f(\mathbb{R}^2))$ et $\sup(f(\mathbb{R}^2))$ sont atteints. En déduire que $I = f(\mathbb{R})$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
3. Trouver tous les points critiques de f.
4. Décrire $I = f(\mathbb{R})$ et donner les préimages de $\min(I)$ et de $\max(I)$.
5. Calculer la hessienne en les points critiques de f. En déduire la nature des points critiques et retrouver la nature des points critiques.

Tourner, SVP

Exercice 4 Soient $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux sous-variétés compactes de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la distance de $\mathcal{V}_1$ à $\mathcal{V}_2$ est strictement positive si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est vide. (La distance entre deux sous-ensembles X, Y dans un espace métrique est donnée par $\inf_{(x,y)\in X\times Y} d(x,y)$.)
2. Montrer que la réunion $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ est une sous-variété si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est vide.
3. Montrer que $(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)\backslash(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$ est une sous-variété.