Université Grenoble Alpes **Année 2023-2024**
Licence de mathématiques, 3e année **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 2
2 avril 2024

Exercice 1 On considère le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ qui est défini par

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 3y^2 - x^3 - x^2 + x - 2 = 0\} .$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une équation définissant la droite affine $\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{E}$ au point $(-1, 1)$.
3. Trouver (a, b) sur $\mathcal{E}$ tel que $(a, b) \in (E \cap \mathcal{D})\backslash\{(-1, 1)\}$.
4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $\mathcal{O}$ contenant 0 et une fonction différentiable $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $(\varphi(y), y)$ appartient à $\mathcal{E}$ pour tout y dans $\mathcal{O}$. (Indication : Utiliser $(-2, 0) \in \mathcal{E}$.)
5. Calculer $\varphi'(0)$.
6. (Bonus) Donner le développement à l'ordre 2 en 0 de φ.

Corrigé : 1. Posons $f(x, y) = 3y^2 - x^3 - x^2 + x - 2$. On a $\nabla f = (-3x^2 - 2x + 1, 6y)$ qui s'annule en $(-1, 0)$ et $(1/3, 0)$ et $f(-1, 0),\ f(1/3, 0) \neq 0$. Donc $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension 1.

2. $\mathcal{D} = (-1, 1) + \mathbb{R}(\nabla f(-1, 1))^\perp$. Comme $\nabla f(-1, 1) = (0, 6)$ on obtient $\mathcal{D} = \{(x, y), \langle \nabla f(-1, 1), (x, y)\rangle = 6y = \langle \nabla f(-1, 1), (-1, 1)\rangle = 6\}$ et $\mathcal{D}$ est donné par l'équation $y = 1$.

3. $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$ est donné par les points $(x, 1)$ tels que $x^3x^2 - x - 1 = 0$. Comme $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{E}$ en $x = -1$, la racine $x = -1$ est solution double. La troisième solution (obtenue par exemple en faisant une division polynomiale ou en utilisant la trace (opposé de la somme des racines) ou encore le terme constant (opposé du produit des racines) est $x = 1$ et on a donc $(a, b) = (1, 1)$.

4. $(-2, 0)$ appartient à $\mathcal{E}$ et $\nabla f(-2, 0) = (-7, 0)$ n'est pas dans l'orthogonal de $(1, 0)$. Donc (thm des fcts implicites), la première coordonnée x est fonction de y sur $\mathcal{E}$ pour (x, y) in $\mathcal{E}$ appartenant à un voisinage de $(-2, 0)$. Quitte à restreindre ce voisinage, on peut prendre un interval ouvert contenant 0.

5. Par calcul : $3y^2 - \varphi(y)^3 - \varphi(y)^2 + \varphi(y) - 2 = 0$ donne $6y - 3\varphi(y)^2\varphi'(y) - 2\varphi(y)\varphi'(y) + \varphi'(y) = 0$ après dérivation par rapport à la variable y. Donc

$$\varphi'(y) = \frac{6y}{3\varphi(y)^2 + 2\varphi(y) - 1}$$

ce qui donne 0 en $y = 0$ et $\varphi(0) = -2$. (De façon équivalente, on peut l'évaluation en $x = -2 = \varphi(0), y = 0$ de $\dfrac{\partial f}{\partial x}\phi'(y) + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.)

Par raisonnement : $\mathcal{E}$ est symétrique par rapport à $(x,y) \longrightarrow (x,-y)$. La fonction différentiable φ est donc paire et sa dérivée à l'origine est nulle.

6. En dérivant f deux fois (par rapport à y) on trouve

$$6 - 6\varphi(y)(\varphi'(y))^2 - 3\varphi(y)^2\varphi''(y) - 2(\varphi'(y))^2 - 2\varphi(y)\varphi''(y) + \varphi''(y) = 0 \ .$$

On posant $y = 0$, $\varphi(0) = -2$ et $\varphi'(0) = 0$ cela donne $0 = 6 - 12\varphi''(0) + 4\varphi''(0) + \varphi''(0) = 6 - 7\varphi''(0)$ et on a donc $\varphi''(0) = \dfrac{6}{7}$.

Exercice 2 Soient Σ_1 et Σ_2 les surfaces de $\mathbb{R}^3$ données par

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y^2 - z^2 = 2\}, \\ \Sigma_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y^2 + z^2 = 1\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{C} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est compact.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-variété.
3. Trouver un ensemble d'au plus 8 points de $\mathcal{C}$ contenant tous les extrema locaux de la fonction $\mathcal{C} \ni (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + y^2$.
4. Calculer les distances à l'origine des points les plus proches et les plus éloignés (de l'origine) sur $\mathcal{C} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Corrigé : 1. Σ_1 et Σ_2 préimages d'un point par une application continue. Ce sont donc des fermées de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ est donc un fermé. En ajoutant deux fois la première équation à trois fois la deuxième équation, on obtient $5x^2 + y^2 + z^2 = 1$ qui définit la sphère unité pour une forme quadratique définie positive. Comme cette sphère est compact et contient le fermé $\mathcal{C}$, l'intersection $\mathcal{C}$ est compacte.

2. On va montrer que les gradients des deux fonctions définissant Σ_i sont linéairement indépendants sur $\mathcal{C}$. Ces deux gradients sont donnés par $(2x, 4y, -2z)$ et $(2x, -2y, 2z)$. La dépendance linéaire pour $x \neq 0$ implique $y = z = 0$ et $\mathbb{R}(1,0,0)$ n'intersecte pas $\mathcal{C}$. Les cas $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ sont similaires.

3. et 4. On trouve $2(x,y,z)$ comme gradient de $(x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$. En un point critique de $\mathcal{C}$, ce gradient et les deux gradients des fonctions définissant Σ_1 et Σ_2 sont linéairement dépendants. On trouve donc

$$\det \begin{pmatrix} 2x & 4y & -2z \\ 2x & -2y & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = -16xyz \ .$$

On a donc $xyz = 0$ pour (x,y,z) un point critique de $\mathcal{C}$.

Si $x = 0$ on obtient $y^2 = 3$ donc $y \in \{\pm\sqrt{3}\}$ et $z \in \{\pm 2\}$. Ces points sont tous à distance $\sqrt{7}$ de l'origine.

Si $y = 0$ on a $2x^2 = 3$ donc $x \in \{\pm\sqrt{3/2}\}$ et z n'est pas réel. Pas de solution (dans $\mathbb{R}^3$).

Si $z = 0$, on a $3y^2 = 1$ donc $y \in \{\pm 1/\sqrt{3}\}$ et $x \in \{\pm 2/\sqrt{3}\}$. Ces points sont à distance $\sqrt{5/3} < \sqrt{7}$ de l'origine. Ce sont donc les points les plus proches (de l'origine) sur $\mathcal{C}$ et $(0, \pm\sqrt{3}, \pm 2)$ sont les points les plus éloignés (de l'origine) sur $\mathcal{C}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-y)e^{-(x^2+y^2)/4}$.

1. Montrer que $f(x,y) \to 0$ pour $\|(x,y)\| \to \infty$.
2. Montrer que $\inf(f(\mathbb{R}^2))$ et $\sup(f(\mathbb{R}^2))$ sont atteints. En déduire que $I = f(\mathbb{R})$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
3. Trouver tous les points critiques de f.
4. Décrire $I = f(\mathbb{R})$ et donner les préimages de $\min(I)$ et de $\max(I)$.
5. Calculer la hessienne en les points critiques de f. En déduire la nature des points critiques et retrouver la nature des points critiques.

Corrigé : 1. $|x-y| \leqslant (x^2+y^2)/4$ en dehors d'un compact et on a donc $0 \leqslant \limsup_{\|(x,y)\|\to\infty} |(x-y)e^{-(x^2+y^2)/4}| \leqslant \lim_{z\to+\infty} ze^{-z} = 0$.

2. La question 1 implique que $\mathcal{K} = f^{-1}(\mathbb{R}\backslash(-2/e, 2/e))$ est compacte. Comme $0 < f(2,0) = 2/e = -f(-2,0)$ on a $\alpha = \inf(f(\mathcal{K})) \leqslant -2/e$ et $\beta = \sup(f(\mathcal{K})) \geqslant 2/e$ et comme $\mathcal{K}$ est compacte, les deux sont atteints. Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, on peut appliquer le thm des valeurs intermédiaires à la restriction de f à une droite joignant un élément de $f^{-1}(\alpha)$ à un élément de $f^{-1}(\beta)$ pour obtenir $f(\mathbb{R}^2) = [\alpha, \beta]$.

3. $\nabla f = \dfrac{1}{2}e^{-(x^2+y^2)/4}(2+xy-x^2, y^2-xy-2)$. On a donc $x^2 = y^2$ (en ajoutant les deux coordonnées) pour un point critique. $\nabla f(x,x) \neq (0,0)$ et on a donc $y = -x$ et en résolvant $\nabla f(x,-x) = (0,0)$ on trouve les deux points critiques $\pm(1,-1)$.

4. Par 2. les bornes de I sont atteintes par les deux points critiques $\pm(1,-1)$. On obtient $\pm 2e^{-1/2}$. On a donc $f(\mathbb{R}^2) = [-2e^{-1/2}, 2e^{-1/2}]$.

5. Hessienne $\dfrac{1}{4}e^{-(x^2+y^2)/4}\begin{pmatrix} x^3-x^2y-6x+2y & x^2y-xy^2+2x-2y \\ x^2y-xy^2+2x-2y & xy^2-y^3-2x+6y \end{pmatrix}$ qui s'évalue en $\pm\dfrac{1}{2}e^{-1/2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ en $\pm(1,-1)$. Déterminant strictement positive et trace négative/positive. Donc déf négative (maximum local) en $(1,-1)$ et déf positive (minimum local) en $(-1,1)$.

Exercice 4 Soient $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux sous-variétés compactes de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la distance de $\mathcal{V}_1$ à $\mathcal{V}_2$ est strictement positive si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est vide. (La distance entre deux sous-ensembles X, Y dans un espace métrique est donnée par $\inf_{(x,y)\in X\times Y} d(x,y)$.)
2. Montrer que la réunion $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ est une sous-variété si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est vide.
3. Montrer que $(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)\backslash(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$ est une sous-variété.

Corrigé : 1. $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ est compacte et la fonction distance $d : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. La fonction $d(x,y)$ atteint donc son minimum μ sur $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Si ce minimum est 0, il est atteint par (x,x) avec $x \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \varnothing$ ce qui est absurde.

2. Soit x un point de la réunion. Quitte èchanger $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ on supposera $x \in \mathcal{V}_1$ et $x \notin \mathcal{V}_2$. Il existe donc une submersion locale φ dans un voisinage $\mathcal{O}_x \subset \mathbb{R}^n$ de x vers $\mathbb{R}^{n-d}$ définissant $\mathcal{V}_1$ localement comme préimage de 0. En restreignant φ à

l'intersection de $\mathcal{O}_x$ avec la la boule ouverte de rayon $\mu = \min_{(y,z)\in\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2} d(y,z)$ et de centre x on obtient un voisinage de x dans $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ comme préimage de 0 d'une submersion locale.
3. On supposera de nouveau $x \in \mathcal{V}_1$ et $x \notin \mathcal{V}_2$ pour $x \in (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)\backslash(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$. Par compacité de $\mathcal{V}_2$, on a $\inf_{y\in\mathcal{V}_2} d(x,y) = \mu_x > 0$ et on procède comme en 2 avec μ_x à la place de μ.