Université Grenoble Alpes **Année 2022-2023**
Licence de mathématiques, 3e année **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 2
28 mars 2023

On rappelle que si E, F sont deux espaces de Banach et $f : E \to F$ est C^{p+1}, alors pour tout $a, h \in E$,

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} d^j f(a)(h, \cdots, h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} d^{p+1} f(a+th)(h, \cdots, h) dt.$$

Exercice 1 Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ une fonction C^2. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \| d^2 f(x) \| \leqslant \|x\|.$$

On rappelle que pour une application bilinéaire A,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} \|A(x, y)\|.$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(0) - df(0)x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^3.$$
2. En utilisant la caractérisation des sous-variétés par les submersions, montrer que le graphe Γ_f de f défini par
$$\Gamma_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, y = f(x)\}$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+k}$.
3. Déterminer une équation du plan tangent $T := T_{(0,f(0))}\Gamma_f$.
4. Montrer que pour tout point $(x, y) \in \Gamma_f$, la distance de (x, y) à T est plus petite que $C\|x\|^3$, où C est une constante qu'on déterminera.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2) + x + y$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^2$, tel que $f(a) = \inf f$.
2. Montrer qu'il existe un unique point critique b de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer sans calcul si c'est un extremum et si c'est le cas, si c'est un minimum ou un maximum. Quels sont les extremas locaux et globaux de f (on ne demande pas les coordonnées précises des points) ?
3. Calculer le signe du déterminant de la hessienne de f en b et sa trace. En déduire le signe des valeurs propres de la hessienne.

Exercice 3

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k} = 1\}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}, y^{2k} = x^{2k}\}$.
2. Montrer que M est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$. Quelle est la dimension de M ?
3. Montrer que $f_{|M}$ admet un minimum et un maximum distincts.
4. Par la méthode des extremas liés, déterminer $\min f_{|M}$, $\max f_{|M}$.
5. En déduire que

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ |x_1 \cdots x_n| \leqslant \frac{\|x\|_2^n}{\sqrt{n}^n}.$$

6. (Question Bonus) En combien de points $f_{|M}$ atteint-elle son maximum ? On pourra raisonner par récurrence sur n.

Exercice 4 Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, x + y + z)$$

et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

1. Montrer que $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = 0\}$ est une sous-variété non bornée de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $f_{|M}(x, y, z) \to \infty$ quand $\|x, y, z\| \to \infty$. En déduire que $f_{|M}$ admet un minimum.
3. Déterminer ce minimum en utilisant le théorème des extrema liés. On pensera à utiliser un déterminant.