Université Joseph Fourier - L3 - Math 123 2016-2017

CC 2 -Corrigé

22 octobre 2016 - 3 heures

Partie 1

I. 1. Comme f est continue, elle l'est en 0_E, donc il existe $\delta > 0$, $\|x\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq 1$. Comme $f(0) = 0$, f est bornée sur la boule de taille δ, donc sur la boule unité par linéarité. Au final $\|f\|_{E'}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Ensuite si $f = 0$, $\|f\| = 0$ et récriproquement si la norme est nulle, f est nulle sur la sphère unité, donc partout car si $x \neq 0$, $f(x) = f(x/\|x\|)\|x\| = 0$ car $x/\|x\| \in S(0,1)$. Enfin $\forall f, g \in E'$,

$$\forall x \in E,\ |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

donc par passage au sup, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

I2 On choisit $K_0 = A$. Comme f est minorée sur A, elle admet un inf fini. Par définition de l'inf, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$, tel que $f(x) \leq \inf_A f + \epsilon$. On choisit $x_1 = x$ en prenant $\epsilon = 1/2$. On définit ensuite K_1 comme proposé. Supposons choisis K_n et x_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par le même argument que pour x_1, il existe $x_{n+1} \in K_n$, tel que $f(x_{n+1}) \leq \inf_{K_{n+1}} f + 1/2^{n+1}$ en prenant $\epsilon = 1/2^{n+1}$ et on choisit K_{n+1} comme proposé.

I3 Soit $x \in K_{n+1}$. Alors $f(x) \leq f(x_{n+1}) - \epsilon\|x - x_{n+1}\|$. De plus $x_{n+1} \in K_n$, donc $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \epsilon\|x - x_n\|$. On a donc

$$f(x) \leq f(x_n) - \epsilon\|x - x_n\| - \epsilon\|x - x_{n+1}\| \leq f(x_n) - \epsilon\|(x - x_n) + (x_{n+1} - x)\|$$

par l'inégalité triangulaire, d'où $x \in K_n$.

I4 Soit $x \in K_n$. On a par I3 $x \in K_{n-1}$, donc

$$\inf_{K_{n-1}} f \leq f(x) \leq f(x_n) - \epsilon\|x - x_n\| \leq \inf_{K_{n-1}} f + 1/2^n - \epsilon\|x - x_n\|,$$

soit le résultat car la différence entre les deux derniers termes doit être positive.

I5 La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy car d'après I4,

$$\forall p, N \in \mathbb{N}^*, \|x_p - x_{p+N}\| \leq 1/(2^{p-1}\epsilon)$$

car par définition $x_p \in K_{p-1}$ et $x_{p+N} \in K_{p-1}$ puisque les K_n sont décroissants. Soit alors $\eta > 0$. Il existe $p \geq 1$ tel que $1/(2^{p-1}\epsilon) \leq \eta$, d'où le résultat. Comme E est complet, $(x_n)_n$ converge vers un $x_0 \in E$.

Pour tout $n, N \in \mathbb{N}$, $x_{n+N} \in K_n$. Or l'application

$$\phi_n : x \mapsto f(x) - f(x_n)\epsilon\|x - x_n\|$$

est continue comme somme de fonctions continues, donc $K_n = \phi_n^{-1}([0, +\infty[)$ est fermée dans E car $[0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Donc $x_0 = \lim_N x_{n+N}$ est dans K_n pour tout n, donc dans l'intersection. Par aillerus, soit $x \in \cap_n K_n$. Alors $\|x - x_0\| \leq 1/(2^n\epsilon)$ pour tout n, donc en passant à la limite $x = x_0$. Donc $\cap_n K_n = \{x_0\}$.

I6 Soit $x \in A$ avec $f(x) < f(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|$. On a donc par continuité de ϕ_n, pour n assez grand $f(x) < f(x_n) - \epsilon\|x - x_n\|$, soit $x \in K_n$ pour tout n assez grand, donc par décroissance, $x \in \cap_n K_n = \{x_0\}$, mais alors l'inégalité est fausse.

Partie 2

II1

a. C est ouvert et contient 0, donc il existe $\epsilon > 0$, $B(0,\epsilon) \subset C$. Donc pour tout $x \neq 0$, $\epsilon/(2\|x\|)x \in C$, donc $\alpha = 2\|x\|/\epsilon > 0$ est dans l'ensemble, qui est par conséquent non vide. De plus l'ensemble est dans $\mathbb{R}^+$ donc l'inf existe et donc $p(x)$, et on vient de voir que $0 \leq p(x) \leq (2/\epsilon)\|x\|$. Pour $x = 0$, l'ensemble est $\mathbb{R}_*^+$ donc non vide aussi et $p(0) = 0$, donc l'encadrement est encore valable.

b. Si $x \in C$, alors $\alpha = 1$ est dans l'ensemble. Mais comme C est ouvert, il existe $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \subset C$. En particulier, si $x \neq 0$, $x(1 + \epsilon/(2\|x\|)) \in C$, donc $\alpha = (1 + \epsilon/(2\|x\|))^{-1} < 1$ est dans l'ensemble, soit $p(x) < 1$. Si $x = 0$, $p(0) = 0 < 1$. Réciproquement, si $p(x) < 1$, alors il existe $\alpha > 0$, tel que $p(x) \leq \alpha < 1$ et $x/\alpha \in C$. Or $x \in [0, x/\alpha] \subset C$ car C est convexe et $(0, x/\alpha) \in C^2$.

c. On a

$$\begin{aligned}\{\alpha > 0, (\lambda x)/\alpha \in C\} &= \{\alpha > 0, x/(\alpha/\lambda) \in C\} \\ &= \{\lambda\alpha', \alpha' > 0 \text{ et } x/\alpha' \in C\} = \lambda\{\alpha > 0, x/\alpha \in C\},\end{aligned}$$

d'où $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ car $\lambda > 0$.

d. Si $x/\alpha \in C$ et $y/\beta \in C$, alors

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} x/\alpha + \frac{\beta}{\alpha+\beta} y/\beta = (x+y)/(\alpha+\beta) \in C$$

par convexité, donc $p(x + y) \leq \alpha + \beta$. En passant à l'inf en α et β, on a l'inégalité souhaitée.

II2.

a. Soient $(x, y) \in (IntK)^2$. Alors il existe ϵ, tels que $B(x,\epsilon) \cup B(y,\epsilon) \subset C$ car C est ouvert. Alors soit $t \in [0,1]$ et $z = tx + (1-t)y \in C$. Soit $z' \in B(z,\epsilon)$. Alors $z' = x't + y'(1-t)$ avec $x' = x + (z' - z)$ et $y' = y + (z' - z)$. Or $\|z - z'\| \leq \epsilon$ implique $x' \in B(x,\epsilon) \subset C$, de même $y' \in C$, donc z' est dans C par convexité.

b. $IntK \subset K$ donc $Adh(IntK) \subset AdhK = K$ car K est fermé. Soit inversement $x \in K$. Soit $y \in IntK$. Il existe $\epsilon > 0$, tel que $B(y,\epsilon) \subset K$ donc pour tout $t \in [0,1]$, si $x_t = ty + (1-t)x$, $B(x_t, t\epsilon) \subset K$ car si $z \in B(x_t, t\epsilon)$, alors $z = x_t + tu$ avec $u \in B(0,\epsilon)$. Donc $z = t(y+u) + x(1-t)$ avec $y + u \in B(y,\epsilon) \subset C$. Par convexité, $z \in C$. D'où $x_t \in IntC$ pour $t \in]0,1]$. Maintenant x est limite de la suite $(x_{1/n})_n \in (IntK)^{\mathbb{N}}$, donc $K \subset Adh(IntK))$.

Partie 3

III1.

a. On a

$$p(y' + u) + p(y'' - u) \geq p(y' + u + y'' - u) = p(y' + y'') \geq g(y' + y'') = g(y') + g(y'')$$

par les hypothèses et la linéarité de g. C'est ce qu'on veut.

b. Soit $x \in H$. On a donc $x = y + tu$ avec $y \in G$ et $t \in \mathbb{R}$, de façon unique car la somme $G \oplus \mathbb{R}u$ est directe. On définit $h(x) = g(y) + tp(u)$. C'est bien défini par unicité de la décomposition et h est linéaire, elle étend g et

$$h(x) = g(y) + tp(u) \leq p(y) + tp(u) = p(y + tu - tu) \leq p(y + tu) + p(-tu) + tp(u) = p(y + tu) = p(x).$$

III2. Soient $(x = a - b, y = a' - b') \in D^2$, avec $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$. Si $t \in [0,1]$, alors $tx + (1-t)y = (ta + (1-t)a') - (tb + (1-t)b')$ où le premier (resp. second) terme est dans A (resp. B) par convexité, donc la différence est dans D, qui est donc convexe. Soit $x = a - b \in D$. A est ouvert donc il existe $\epsilon > 0$, $B(a,\epsilon) \subset A$. Soit $z \in B(x,\epsilon)$. On a $z = (a-b)+u$ avec $u \in B(0,\epsilon)$, donc $z = (a+u)-b$ avec $a+u \in B(a,\epsilon) \subset A$, donc $B(x,\epsilon) \subset D$. Si $0 \in D$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a = b$, ce qui implique $A \cap B \neq \emptyset$ ce qui est faux.

b. Pour $t \geq 0$, $g(tx_0) \leq 0 \leq p(x)$. Pour $t < 0$ et $x = tx_0$, $x/(-t) = -x_0 \notin D - x_0$ sans quoi $0 \in D$. Donc $g(tx_0) = -t \leq p(x)$.

c. On étend g à tout F en une forme linéaire continue f telle que $f \geq p$ comme l'affirme le III1. Maintenant,

$$\begin{aligned}\sup_A f - \inf_B f &= \sup_{(x,y)\in A\times B} f(x-y) = \sup_D f = \sup_D f(x-x_0) + f(x_0)\\ &= \sup_{D-x_0} f + f(x_0) \leq \sup_{D-x_0} p + g(x_0) \leq 1 - 1 = 0,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $p < 1$ sur $C = D - x_0$.

Partie 4

IV 1.
a. Pour $(g,g') \in (E')^2$ $(a,a') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in r$ $(x,t) \in E \times \mathbb{R}$,

$$\Phi_{(g,a)+\lambda(g',a')}(x,t) = (g+\lambda g')(x) + (a+\lambda a')t = (g(x)+at) + \lambda(g'(x)+a't),$$

soit $\Phi_{(g,a)+\lambda(g',a')} = \Phi_{g,a} + \lambda\Phi_{g',a'}$ et donc φ est linéaire. Elle est injective car $\varphi(\gamma,\alpha) = 0$ implique en prenant $t = 0$, $\forall x \in E, \gamma(x) = 0$ soit $\gamma = 0$ et de même $\alpha = 0$. Soit $\psi \in Y'$. Alors $x \in E \mapsto \gamma(x) = \psi(x,0)$ définit une forme linéaire sur E continue parce que ψ l'est et $x \mapsto (x,0)$ aussi, et $t \in \mathbb{R} \mapsto \psi(0,t) \in \mathbb{R}$ est linéaire donc $\exists\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \psi(0,t) = \alpha t$. On a $\varphi(\gamma,\alpha) = \psi$ car ψ est linéaire. Donc φ est bijective et son inverse est linéaire.

b. Pour $\|(x,y)\|_Y = \|x\| + |t| \leq 1$, on a $\|x\| \leq 1$ et $|t| \leq 1$, donc

$$|\varphi(\gamma,\alpha)(x,t)| \leq |\gamma(x)|\|x\| + |\alpha||t| \leq \max(\|\gamma\|_{E'},|\alpha|)(\|x\|+t),$$

donc $\|\varphi(\gamma,\alpha)\|_{Y'} \leq \max(\|\gamma\|_{E'},|\alpha|)$. De plus, si le max est atteint pour $\|\gamma\|_{E'}$, alors

$$\sup_{(x,t)\in E\times\mathbb{R},\|x,t\|\leq 1} |\varphi(\gamma,\alpha)(x,t)| \geq \sup_{(x,0)\in E,\|x\|\leq 1} |\gamma(x)| = \|\gamma\|_{E'} \geq \max(\|\gamma\|_{E'},|\alpha|)$$

d'où égalité de la norme et du max. Si c'est $|\alpha|$ le max, on conclut identiquement.

IV2 . Or si $(x,t) \in C_1$, $(x',t') \in C_1$ et $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}st + (1-s)t' &\leq s(f(x_0) - \epsilon\|x-x_0\|) + (1-s)(f(x_0) - \epsilon\|x'-x_0\|)\\ &\leq f(x_0) - \epsilon\|s(x-x_0) + (1-s)(x'-x_0)\| = f(x_0) - \epsilon\|(sx+(1-s)x') - x_0\|,\end{aligned}$$

donc C_1 est convexe. De plus soit

$$\phi : E \times \mathbb{R} \ni (x,t) \mapsto t - f(x_0) + \epsilon\|x - x_0\|.$$

L'application ϕ est continue,

$$C_1 = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}, \phi(x,t) \leq 0\}$$

avec $\phi(-1,x_0) < 0$. Par continuité de ϕ, il existe $\eta > 0$, $B((-1,x_0),\eta) \subset E \times \mathbb{R}$ telle que $\phi_{|B(x_0,-1),\eta)} < 0$, soit $B((x_0,-1),\eta) \subset IntC_1$ et C_1 est d'intérieur non vide. Par le II2 on obtient que $IntC_1$ est un convexe.

(Par ailleurs notons que C_1 est l'image réciproque de $\mathbb{R}^+$ par une application continue, donc est ferm.) L'application

$$\psi : (x,t) \in C \times \mathbb{R} \mapsto t - f(x)$$

est linéaire et $C_2 = \{\psi \geq 0.\}$ On a clairement $(x_0, 2|f(x_0)|) \in C_2$ donc C_2 est non vide. C'est un convexe car si $((x,t),(x',t')) \in C_2^2$, alors pour tout $s \in [0,1]$, d'une part $sx + (1-s)x' \in C$ par convexité de C, d'autre part

$$\psi(s(x,t) + (1-t)(x',t')) = s\psi((x,t)) + (1-s)\psi(x',t') \geq 0,$$

donc C_2 est convexe. Si $(x,t) \in IntC_1 \cap C_2$, alors $f(x) \leq f(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|$ donc égalité par l'hypothèse de l'énoncé. Mais alors $\phi(x,t) = 0$. Or pour tout $\eta > 0$, $\phi(x, t+\eta) = \eta$ n'est pas ≤ 0, donc $(x, t+\eta) \notin C_1$, donc $(x,t) \notin IntC_2$.

IV 3 a. Par le III2c., il existe une forme linéaire f non nulle continue sur $E \times \mathbb{R}$ qui sépare $IntC_1$ et C_2. Par le IV1a., il existe $(\gamma, \alpha) \in E' \times \mathbb{R}$, $f = \varphi(\gamma, \alpha)$.

b. Puisque $C_1 = Adh(IntC_1))$ II2b car C_1 est fermé (cf parenthèse dans la preuve précédente), $\sup_{C_1} f = \sup_{Adh(IntC_1)} f$. De plus $\sup_{IntC_1} \leq \inf_{C_2} f$ et soit $x \in Adh(IntC_1)$, alors $x = lim_n x_n$ avec $x_n \in IntC_1$. On a pour tout n, $f(x_n) \leq \inf_{C_2} f$ donc par continuité de f, on peut passer à la limite et donc $f(x) \leq \inf_{C_2} f$, ce qui implique le que $\sup_{AdhIntC_1} f \leq \inf_{C_2} f$ et f sépare C_1 et C_2.

IV 4. On a pour tout $x \in E$, $(x, f(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|) \in C_1$. Par ailleurs $(x_0, f(x_0)) \in C_2$. Si $\alpha = 0$, on a donc pour tout $x \in E$, $g(x) \leq g(x_0)$, ce qui n'est pas possible puisque si $g \neq 0$, g est surjective, donc non bornée.

Si f sépare deux ensembles, alors f/α aussi si $\alpha \neq 0$. On applique cette remarque à $\varphi(\gamma, \alpha)$, par linéarité de φ, $g = \gamma/\alpha$ convient.

IV 5. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x, f(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|) \in C_1$. Par ailleurs $(x_0, f(x_0)) \in C_2$. Donc

$$g(x) + (f(x_0) - \epsilon\|x - x_0\|) \leq \sup_{C_1}(g+t) \leq \inf_{C_2}(g+t) \leq g(x_0) + f(x_0),$$

soit $g(x - x_0) \leq \epsilon\|x - x_0\|$. C'est vrai pour tout $x \in E$, donc $g(y) \leq \epsilon\|y\|$ pour tout $y \in E$, donc par linérité $|g(y)| \leq \epsilon\|y\|$ et donc $\|g\|_{E'} \leq \epsilon$. on a aussi $\forall x \in C$, $(x, f(x)) \in C_2$ donc on obtient avec la même inégalité en prenant à gauche $x = x_0$, $g(x_0) + f(x_0) \leq g(x) + f(x)$, donc x_0 est un minimum pour $f + g_{|C}$.

IV 6. Soit $\epsilon > 0$ et $f \in E'$. D'après les questions précédentes, il existe $g \in E'$ telle que $-g - f$ atteint un minimum sur C, soit $f + g$ un maximum, avec $\|-g\|_{E'} = \|g\|_{E'} \leq \epsilon$. $f + g$ est aussi continue, d'où le résultat.