Université Joseph Fourier - L3 - Math 123 2017-2018

CC 2 -Corrigé

25 octobre 2017 - 3 heures

Exercice 1 *(pt.) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(1) = 0$.*

1. *On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, par $g_n(x) = x^n f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que g_n converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$. Donner la limite.*
2. *On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, par $h_n(x) = f(x^n)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que h_n converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$. Que peut-on dire de f si la convergence est uniforme ?*

Réponse.

1. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en 1, il existe $1 > \delta > 0$, tel que
$$\forall x \in [0,1], |x-1| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| = |f(x)| \leq \epsilon.$$
Soit par ailleurs $N \in \mathbb{N}$, tel que
$$\forall n \geq N,\ |1-\delta|^n \|f\|_\infty \leq \epsilon.$$
Un tel N existe car $|1-\delta| < 1$ et $\|f\|_\infty < \infty$ car f est continue sur un compact, si bien que
$$|1-\delta|^n \|f\|_\infty \to_{n\to\infty} 0.$$
Maintenant, $\forall x \in [0, 1-\delta]$, $\forall n \geq N$ $|g_n(x) - 0| = |x^n f(x)|$ est borné par $|1-\delta|^n \|f\|_\infty \leq \epsilon$, tandis que $\forall x \in [1-\delta, 1]$, $|g_n(x)| \leq |f(x)| \leq \epsilon$. Au total, $\|g_n - 0\|_\infty \leq \epsilon$ pour $n \geq N$, ce qui démontre que $(g_n)_n$ converge uniformément vers l'application nulle sur $[0,1]$.
2. Si $x \in [0,1[$, $x^n \to 0$, donc $h_n(x) = f(x^n) \to_n f(0)$ car f est continue en 0. De plus, $h_n(1) = f(1) \to_n f(1) = 0$. Donc h_n converge simplement vers h telle que $h_{|[0,1[} = f(0)$ et $h(1) = 0$. Si f n'est pas constante, il existe $x_0 \in]0,1]$, $f(x_0) \neq f(0)$. On peut suppose que $x_0 < 1$ car si f est constante sur $[0,1[$, elle l'est sur $[0,1]$ par continuité. On a puisque $0 \leq x_0 < 1$ et donc $0 \leq x_0^{1/n} < 1$,
$$\|h_n - h\|_\infty \geq |h_n(x_0^{1/n}) - h(x_0^{1/n})| = |f(x_0) - f(0)|,$$
donc $\limsup_n \|h_n - h\|_\infty \geq |f(x_0) - f(0)| > 0$ si bien que $(h_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Si f est constante, $h_n = f$ donc la convergence est uniforme.

Exercice 2 *(pt.) On considère l'ensemble*
$$X = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$$
et pour tout $(f,g) \in X^2$, l'ensemble
$$A(f,g) = \{x \in [0,1] :\ f(y) = g(y) \text{ pour tout } y \in [x,1]\ \},$$
et enfin l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ définie par $d(f,g) = \inf A(f,g)$.

1. *Montrer que d est bien définie et que $d(f,g) \in A(f,g)$.*
2. *Montrer que (X,d) est un espace métrique. La distance d est-elle induite par une norme ?*
3. *Soit*
$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$
la distance infini. Démontrer que $\mathrm{id}_1 : (X,d) \to (X,d_\infty)$ et $\mathrm{id}_2 : (X,d_\infty) \to (X,d)$, dont l'application sous-jacente est l'identité, ne sont pas continues.

Réponse.

1. L'ensemble $A(f,g)$ contient 1 donc est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$, donc minoré, si bien que d est un réel positif bien défini. De plus $A(f,g) = A(g,f)$ donc d est symétrique. Soit $(x_n)_n \in A(f,g)^{\mathbb{N}}$ tendant vers $d(f,g)$, et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|x_n - d(f,g)| \leq \epsilon$, donc
$$f_{|[d(f,g)+\epsilon,1]} = g_{|[d(f,g)+\epsilon,1]}$$
si bien que $f - g = 0$ sur $]d(f,g),1]$. Par continuité de $f-g$, $f-g=0$ sur $[d(f,g),1]$, soit $d(f,g) \in A(f,g)$.
2. Pour tout f et g dans X, $d(f,g) = 0$ ssi $0 \in A(f,g)$, soit $f = g$ sur $[0,1]$ donc $f = g$ dans X. Enfin, soient f,g,h dans X. Pour $x \geq d(f,h)+d(g,h)$, $x \geq d(f,h)$ donc $f = h$ sur $[x,1]$, et de même $g = h$ sur $[x,1]$, donc $f = g$ sur $[x,1]$, soit $x \geq d(f,g)$, d'où $d(f,g) \leq d(g,h) + d(f,h)$. Notons en passant qu'en fait $d(f,g) \leq \max(d(f,h), d(g,h))$ donc d est ultramétrique.

   Soit $f(x) = 1-x$. On a bien $f \in X$ et $f \neq 0$. Donc $0 < d(f,0)$. Pour tout $\lambda > 0$, $A(\lambda f, 0) = \{1\}$ donc $d(\lambda f, g) = 1$. Mais si d est induite par une norme, $d(\lambda f, g) = |\lambda| d(f,g) > 1$ pour λ assez grand, ce qui contredit cette hypothèse.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n définie par $f_n(x) = 0$ pour $x \geq 1/n$, $f_n(x) = 1 - nx$ pour $x \in [0,1/n]$. Clairement f_n est continue et $f_n(1) = 0$, donc $(f_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$. De plus $d(f_n, 0) = 1/n \to_n 0$. Mais $d_\infty(f_n, 0) \geq |f_n(0) - 0(0)| = 1 \not\to_n 0$. Donc id_1 n'est pas continue. Maintenant, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (1-x)/n$. On a $d_\infty(f_n, 0) = 1/n \to 0$ mais $d(f_n, 0) = 1 \not\to_n 0$. Donc id_2 n'est pas continue.

Exercice 3 *(pt.) Soit $\ell^\infty \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de suites réelles bornées et soit $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ l'application définie par*
$$d\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|b_n - a_n|}{2^n}.$$

1. *Montrer que (ℓ^∞, d) est un espace métrique.*
2. *Prouver qu'il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq \ell^\infty$ dense dans (ℓ^∞, d).*
3. *Soit $d_\infty : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ donné par*
$$d_\infty\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n - a_n|.$$
   Montrer qu'il existe une suite convergeant pour d_∞ mais pas pour d.
4. *Est-ce que l'espace métrique (ℓ^∞, d) est complet ?*

Réponse.

1. Soient a et b dans l^∞. Alors il existe $C \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \max(|a_n|, |b_n|) \leq C$. Donc $|b_n - a_n|/2^n \leq 2C/2^n$. cette dernière suite étant géométrique de raison $0 < 1/2 < 1$, elle converge donc "la série $d(a,b)$" converge absolument donc converge vers un nombre positif. Ce nombre est nul ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - b_n|/2^n = 0$, soit $a = b$. Enfin, si a,b,c sont dans l^∞, par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue,
$$d(a,b) \leq \sum_{\mathbb{N}} (|a_n - c_n| + |b_n - c_n|)/2^n = d(a,c) + d(b,c).$$
   Au total, d est une distance sur l^∞.
2. Soit
$$S = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{q=(q_0,\cdots,q_N)\in\mathbb{Q}^n} \{m(q)\}$$
   où $m(q)$ est la suite définie par $m(q)_n = q_i$ pour $n \in \{0, \cdots, N\}$ et $m(q)_n = 0$ pour $n \geq N+1$. Puisque $m(q)$ est stationnaire, elle est bornée donc dans l^∞, soit $L \subset l^\infty$. De plus, S est

dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Enfin, soit $a \in l^\infty$ et $\epsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$, tel que $\|a\|_\infty/2^N \leq \epsilon/2$. On a alors

$$\sum_{n \geq N+1} |a_n|/2^n \leq \|a\|_\infty/2^N \leq \epsilon/2.$$

Pour tout $n \in [0, N]$, soit $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|q_n - a_n| \leq \epsilon/(2(N+1))$. C'est possible car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{n \leq N} |a_n - q_n|/2^n \leq \sum_{n \leq N} \epsilon/(2(N+1)) \leq \epsilon/2.$$

Au total, $d(m(q), a) \leq \epsilon$, avec $m(q) \in S$, donc S est dense dans (l^∞, d).

3. Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a(n)$ la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\, a(n)_k = \delta_{kn}.$$

On a $a(n) \in l^\infty$ et $d(a(n), 0) = 1/2^n \to_n 0$, mais $d_\infty(a(n), 0) = 1 \not\to_n 0$ donc les topologies sont distinctes.

4. Soit $a(p) \in l^\infty$ la suite définie par $a(p)_n = n$ pour $n \in [0, p]$ et $a(p)_n = 0$ pour $n \geq p$. Alors pour tout $p < q \in \mathbb{N}$,

$$d(a(p), a(q)) = \sum_{n=p+1}^{q} n/2^n.$$

Si $u_n = n/2^n$, on a $u_{n+1}/u_n = (n+1)/(2n) \to_n 1/2 \in [0, 1[$ donc par le critère de d'Alembert la série $\sum_n u_n$ est convergente la suite des sommes partielle est de Cauchy. Au total, $(a(p))_p$ est de Cauchy. Si $a(p)$ converge, c'est vers la suite $a = (n)_n$ qui n'est pas bornée, donc (l^∞, d) n'est pas complet.

Exercice 4 *(pt.) On dit qu'un espace métrique (E, d) est* métriquement homogène *si pour tous $x, y \in E$ il existe une isométrie bijective $f : E \to E$ telle que $f(x) = y$.*

1. Soit $E_1 = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère unité munie de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que E_1 est métriquement homogène.
2. Soit $E_2 \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité (centrée autour de l'origine $0_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$) munie de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute isométrie bijective f de E_2 satisfait que $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. En déduire que E_2 n'est pas métriquement homogène.

Réponse.

1. Soit $x, y \in E_1$ et $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale par rapport au plan P orthogonal au vecteur $\vec{xy}$ passant par l'origine. Par définition, $s(x) = y$ et s est une isométrie bijective de $\mathbb{R}^3$. Enfin, E_1 est invariante par s. En effet, on peut choisir les axes orthonormés de sorte que $\vec{xy}$ soit colinéaire à l'axe k. Dans ce cas, le plan P est xOy, et s est alors l'application $(x, y, z) \to (x, y, -z)$, qui laisse invariante E_1, puisque

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (-z)^2 = 1 \Leftrightarrow s(x, y, z) \in E_1.$$

Au total, $s_{|E_1}$ est une isométrie bijective de E_1 envoyant x sur y.

2. Pour tout $x \in S^n$, $\|f(x) - f(-x)\| = \|2x\| = 2$, donc $f(x) \in S^n$ car $\|f(x)\| \leq 1$ et $\|f(-x)\| \leq 1$. La sphère est donc invariante par f. Si $f(0) \neq 0$, soit $x = f^{(-1)}(f(0)/\|f(0)\|) \in S^n$. Alors $1 = \|0 - x\| = \|f(0) - f(x)\| = |\|f(0)\| - 1| < 1$ (car S^n est invariante, donc $\|f(0)\| < 1$), ce qui est une contradiction.