CONTRÔLE CONTINU 2 - TOPOLOGIE PARCOURS A - 21 OCTOBRE 2016 - DURÉE : 3 HEURES

Les documents, téléphones portables et tous les autres dispositifs electroniques sont strictement interdits.

NOTATIONS :

Dans tout le problème, $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé réel et E' l'ensemble des formes linéaires continues f de E dans $\mathbb{R}$

On dit qu'une partie non vide C de E est convexe si

$$\text{pour tous } x,\, y \in C \text{ et } t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in C.$$

Si U est une partie de E on définit

$$\operatorname{Int} U = \{x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } \ B(x,r) \subset U\}$$

et

$$\operatorname{Adh} U\, \{x \in E, \forall r > 0\ B(x,r) \cap U \neq \emptyset\}$$

PREMIÈRE PARTIE :

Dans cette partie, l'espace E est supposé complet et A désigne une partie fermée non vide de E. Soient $f\ : A \to \mathbb{R}$ une application continue et minorée et ε un réel strictement positif fixé.

I.1. Montrer que

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E; \|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

définit une norme sur E'.

I.2. Montrer qu'on peut construire une suite $(K_n)_{n \geqslant 0}$ de parties de E et une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de E telles que $K_0 = A$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} \in K_n,\ f(x_{n+1}) \leqslant \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } K_{n+1} = \{x \in A \mid f(x) \leqslant f(x_{n+1}) - \varepsilon \|x - x_{n+1}\|\}.$$

I.3. Montrer que la suite (K_n) est décroissante.

I.4. Montrer que pour tous $n \geqslant 1$ et $x \in K_n$, $\|x - x_n\| \leqslant \dfrac{1}{2^n \varepsilon}$.

I.5. Montrer que la suite (x_n) converge vers un point $x_0 \in A$ vérifiant : $\cap_{n \geqslant 0} K_n = \{x_0\}$.

I.6. Montrer que pour tout $x \in A$,

$$f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon \|x - x_0\|.$$

DEUXIÈME PARTIE :

II.1. Soit C un convexe ouvert inclus dans E contenant 0. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0, \frac{1}{\alpha} x \in C\}.$$

- **a.** Montrer que la définition ci-dessus a un sens et qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\|$.
- **b.** Montrer que $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$.
- **c.** Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in E$,
$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$
- **d.** Montrer que pour tous x et $y \in E$,
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

II.2. Soit K inclus dans E un convexe d'intérieur non vide.

- **a.** Montrer que $\operatorname{Int} K$ est convexe.
- **b.** Montrer que si K est fermé alors $\operatorname{Adh}(\operatorname{Int} K) = K$.

TROISIÈME PARTIE :

Dans cette partie, F désigne un espace vectoriel normé réel.

III.1. Soient $p\ : F \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

(1) $$\forall x \in F,\ \forall \lambda > 0,\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$$

(2) $$\forall x, y \in F,\ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$

G un sous espace vectoriel strict de F (i.e. $G \neq F$) et $g\ : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur G telle que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant p(x)$. On fixe $u \in F \setminus G$ et on note $H = G \oplus \mathbb{R}u$ la somme directe de G et de la droite vectorielle engendrée par u.

- **a.** Montrer que pour tous $y', y'' \in G$, $p(y' + u) - g(y') \geqslant g(y'') - p(y'' - u)$.

b. Montrer qu'il existe une application linéaire $h : H \to \mathbb{R}$ prolongeant g (i.e. pour tout $y \in G$, $h(y) = g(y)$) et vérifiant : pour tout $x \in H$, $h(x) \leqslant p(x)$.

Dans toute la suite du problème. on admettra le résultat de prolongement suivant :
Pour toute forme linéaire g définie sur un sous espace vectoriel G de F et vérifiant les hypothèses ci-dessus, il existe une forme linéaire $f : F \to \mathbb{R}$ prolongeant g et vérifiant : pour tout $x \in F$, $f(x) \leqslant p(x)$.

III.2. Soient A et B deux convexes non vides et disjoints inclus dans F. On suppose que A est ouvert. On note D, ensemble différence entre A et B, l'ensemble $A - B = \{d \in F \mid \exists a \in A, b \in B \mid d = a - b\}$.

a. Vérifier que D est un convexe ouvert et $0 \notin D$.

b. Soit $x_0 \in D$ fixé. On note $C = D - \{x_0\}$ l'ensemble différence entre D et le singleton $\{x_0\}$. L'ensemble C est donc un convexe ouvert contenant 0 et on peut poser comme dans la partie II)

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \frac{1}{\alpha}x \in C\}.$$

On note $G = \mathbb{R}x_0$ la droite vectorielle engendrée par x_0 et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(tx_0) = -t$. Montrer que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant p(x)$.

c. En déduire qu'il existe une forme linéaire f continue sur F, non nulle et telle que :

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqslant \inf_{y\in B} f(y).$$

On dira alors que f sépare A et B.

QUATRIÈME PARTIE :

Dans cette partie, l'espace E est supposé complet, Y désigne l'espace vectoriel produit $E\times\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|(x,t)\|_Y = \|x\| + |t|$$

et Y' l'ensemble des formes linéaires continues sur Y.

IV.1. **a.** Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E'\times\mathbb{R} & \to & Y' \\ (\gamma,\alpha) & \mapsto & \Phi_{\gamma,\alpha} \end{cases}$$

définie par : $\Phi_{\gamma,\alpha}(x,t) = \gamma(x) + \alpha t$ est linéaire et bijective, d'inverse linéaire.

b. Calculer $\|\varphi(\gamma,\alpha)\|_{Y'}$ en fonction de $\|\gamma\|_{E'}$ et $|\alpha|$.

Dans la suite de cette partie, C désignera un convexe fermé borné non vide inclus dans E, f une forme linéaire continue sur E, ε un réel strictement positif fixé et $x_0 \in C$ un élément vérifiant :

$$\forall x \in C,\ f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|$$

(l'existence de x_0 a été établie dans la partie I).
On notera :

$$C_1 = \{(x,t) \in E\times\mathbb{R} \mid t \leqslant f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|\} \text{ et } C_2 = \{(x,t) \in C\times\mathbb{R} \mid t \geqslant f(x)\}.$$

IV.2. Montrer que $\operatorname{Int} C_1$ et C_2 sont deux convexes non vides disjoints de Y.

IV.3. **a.** Montrer en utilisant les résultats précédents qu'il existe $(h,\alpha) \in E'\times\mathbb{R}$ tel que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ soit non nulle et sépare $\operatorname{Int} C_1$ et C_2. La définition de la séparation de deux parties par une forme linéaire a été donnée dans la partie III.

b. Montrer que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ sépare aussi C_1 et C_2.

IV.4. Montrer que $\alpha \neq 0$. En déduire qu'il existe $g \in E'$ tel que la forme linéaire $\varphi(g,1)$ sépare C_1 et C_2.

IV.5. Montrer que $\|g\|_{E'} \leqslant \varepsilon$ et que $f + g$ atteint son minimum sur C au point $x_0 \in C$.

IV.6. En déduire que l'ensemble

$$E'_0 = \{\theta \in E' \mid \exists y_0 \in C,\ \theta(y_0) = \sup_{y\in C} \theta(y)\}$$

des formes linéaires continues qui atteignent leur maximum sur C est dense dans E', c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $f \in E'$ on a $B(f,\varepsilon) \cap E'_0 \neq \emptyset$.