CC2 - Topologie A (25/10/2017)

Premier Semestre 2017-2018

La barème est seulement indicatif.

Exercice 1. *(4 pt.) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(1) = 0$.*

(a) On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, par $g_n(x) = x^n f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que g_n converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$. Donner la limite.

(b) On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, par $h_n(x) = f(x^n)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que h_n converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$. Que peut-on dire de f si la convergence est uniforme ?

Exercice 2. *(5 pt.) On considère l'ensemble*

$$X = \Big\{ f \in C([0,1], \mathbb{R}) : f(1) = 0 \Big\}.$$

Pour tout $(f,g) \in X^2$, on définit l'ensemble

$$A(f,g) = \Big\{ x \in [0,1] : \; f(y) = g(y) \text{ pour tout } y \in [x,1] \Big\}$$

et l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ donnée par $d(f,g) = \inf A(f,g)$.

(a) Montrer que d est bien définie et que $d(f,g) \in A(f,g)$.

(b) Montrer que (X,d) est un espace métrique. La distance d est-elle induite par une norme?

(c) Soit

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

la distance infini. Démontrer que $\mathrm{id}_1 : (X,d) \to (X,d_\infty)$ et $\mathrm{id}_2 : (X,d_\infty) \to (X,d)$, dont l'application sous-jacente est l'identité, ne sont pas continues.

Exercice 3. *(6 pt.) Soit $\ell^\infty \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'ensemble de suites réelles bornées et soit $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ l'application définie par*

$$d\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|b_n - a_n|}{2^n}.$$

(a) Montrer que (ℓ^∞, d) est un espace métrique.

(b) Prouver qu'il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq \ell^\infty$ dense dans (ℓ^∞, d).

(c) Soit $d_\infty : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ donnée par

$$d_\infty\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n - a_n|.$$

Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\ell^\infty)^\mathbb{N}$ qui converge pour d mais pas pour d_∞.

(d) L'espace métrique (ℓ^∞, d) est-il complet?

Exercice 4. *(5 pt.) On dit qu'un espace métrique (E,d) est **métriquement homogène** si pour tous $x, y \in E$ il existe une isométrie bijective $f : E \to E$ telle que $f(x) = y$.*

(a) Soit $E_1 = \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère unité munie de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que E_1 est métriquement homogène.

(b) Soit $E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ la boule unité (centrée autour de l'origine $0_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$) munie de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute isométrie bijective f de E_2 satisfait que $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. En déduire que E_2 n'est pas métriquement homogène.