Université Grenoble Alpes **Année 2023-2024**
Licence de mathématiques, 3e année **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 1
5 mars 2024

Une feuille A4 autorisée, pas de calculatrice.

Exercice 1 On considère les applications f et g définies par

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (zx, z-2y) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (y^2 - e^x, \sin(\pi xy)) \end{array}$$

Soit $a = (1,0,1)$.

1. Calculer la matrice jacobienne de f en a ;
2. Calculer la matrice jacobienne de g en $f(a)$;
3. En déduire la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a. L'application $d(g \circ f)(a)$ est-elle inversible ? Injective ? Surjective ?

Exercice 2 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + \sin^2 y} & \text{si } x^2 + \sin^2 y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que si $a = (x,y) \neq (0,0)$ satisfait $x^2 + \sin^2 y = 0$, alors f n'est pas bornée au voisinage de a.
2. Montrer que f est continue en $(0,0)$. On pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité
$$\forall t \in [0, \pi/2],\ \sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t.$$
3. Quel est l'ensemble de continuité de f ?
4. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$. Que valent les dérivées partielles ? En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme N définie par :

$$N\left(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{d} |a_i|.$$

et $F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty([0,1])}$. On fixe une fonction $\varphi \in F$, et on définit

$$\begin{array}{rcl} f_\varphi : E & \to & F \\ P & \mapsto & P^2 \circ \varphi. \end{array}$$

1. Montrer que f_φ est bien définie.
2. Soit $L_\varphi : E \to F$ définie par

$$\begin{array}{rcl} L_\varphi : E & \to & F \\ Q & \mapsto & Q \circ \varphi \end{array}$$

   (a) On suppose que φ est à valeurs dans $[-1, 1]$. Montrer que L_φ est continue.
   (b) On suppose que $\varphi = 2$. Montrer que L_φ n'est pas continue.

   Dans toute la suite, on suppose que

$$\forall x \in [0, 1], |\varphi(x)| \leqslant 1.$$

3. Montrer que
$$f_\varphi(Q) = \mathrm{o}(Q).$$
4. En déduire que f_φ est différentiable sur E et calculer la différentielle de f_φ en un polynôme P.
5. On suppose que $\varphi = 1$. Soit $P \in E$. Que vaut $|||df(P)|||$?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (e^x y, x^2).$$

1. Montrer que f est C^1.
2. Soit
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}.$$
   Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $f(U)$, puis démontrer que $f_{|U}$ est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.
3. Montrer que U est maximal, c'est-à-dire pour tout ouvert V contenant strictement U, $f_{|V}$ n'est pas un difféomorphisme sur son image.
4. Calculer la jacobienne de f^{-1} au point $(e, 1)$.