DS1, MAT114
Mardi 14 octobre, durée 1h30

Aucun document ni calculatrice autorisé. Les exercices sont indépendants.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, ainsi que A, B et C trois points de $\mathbb{R}^3$, dont les coordonnées dans le repère canonique $(0, i, j, k)$ sont respectivement $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ et $(1, a, 1)$.
   (a) Calculer les coordonnées du vecteur $u \wedge v$, où $u = \vec{AB}$ et $v = \vec{AC}$.
   On a $u = (1, 1, 2)$ **et** $v = (0, a - 1, 0)$**, et** $u \wedge v = (a - 1)(-2, 0, 1)$.
   (b) Quel est l'ensemble $F \subset \mathbb{R}$ des $a \in \mathbb{R}$ tels que les trois points A, B et C définissent un unique un plan affine ? Pour $a \in F$, on notera Π ce plan.
   Les trois points forment un plan ssi u **n'est pas colinéaire à** v**, donc ssi** $u \wedge v \neq 0$**, soit** $a \neq 1$. $F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (c) Pour $a \in F$, donner une équation de Π.
   On a $M \in \Pi$ **ssi** $\langle AM, u \wedge v\rangle = 0$**, soit** $(a - 1)\big(- 2(x - 1) + (z - 1)\big) = 0$**, soit puisque** $a \neq 1$, $-2x + z + 1 = 0$.
   (d) Soit $a \in F$, $b \in \mathbb{R}$ et Δ la droite passant par A et $K = (1, 2, b)$. Pour quels b la droite Δ est-elle incluse dans le plan (A, B, C) ?
   La droite est portée par le vecteur $w = (0, 1, b-1)$**, qui appartient au plan vectoriel associé à** (A, B, C) **d'équation** $-2x + z = 0$ **ssi** $(b - 1) = 0$**, soit** $b = 1$**. Dans ce cas, elle est est parallèle au plan** Π**, et puisque** $A \in \Delta \cap \Pi$**, elle y est incluse.**
2. Pour tout $\theta \in [0, \pi[$, on définit le plan affine $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ passant par le point B dont les coordonnées dans la base canonique (i, j, k) sont $(-1, 0, 0)$, et de vecteur normal (ou orthogonal) $u = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit de plus la droite affine $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ passant par le point $A = (a, 0, 0)$ et de vecteur directeur $v = (-1, 0, 1)$.
   (a) Faire un dessin de la situation pour $\theta = 0$ et $a = 1$.
   (b) Donner une équation implicite du plan Π. Quelle est l'équation du plan vectoriel P associé ?
   Le point $M = (x, y, z)$ **est dans** Π **si et seulement si** $\langle \vec{BM}, u\rangle = 0$**, soit** $(x + 1)\cos\theta + y \sin\theta = 0$**. L'équation de** P **est donc** $x \cos\theta + y \sin\theta = 0$.
   (c) Pour quels (a, θ) la droite Δ est-elle parallèle ou incluse dans Π ?
   La condition équivaut à $v \in P$**, soit** $(-1)\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$.
   (d) Donner les équations paramétriques de la droite Δ.
   $M \in \Delta$ **ssi** $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, $AM = \lambda v$**, soit** $x = a - \lambda$, $y = 0$ **et** $z = \lambda$.
   (e) En déduire $\Delta \cap \Pi$ en fonction de a et θ. Si cette intersection est un unique point, on donnera les coordonnées de ce dernier.
   On a
   $$M = (x, y, z) \in \Delta \cap \Pi \Leftrightarrow \exists\lambda, (a - \lambda + 1)\cos\theta = 0.$$
   Donc si $\theta \neq \pi/2$**, il existe un unique** $\lambda = a + 1$**, donc l'intersection est unique et a pour coordonnées** $(-1, 0, a + 1)$**. Si** $\theta = \pi/2$**, la condition est vraie pour tout** $\lambda \in \mathbb{R}$**, donc pour tout point de la droite** Δ**, soit** $\Pi\cap\Delta = \Delta$**.**

(f) Calculer la distance de A au plan Π.
On a d'après le cours :

$$dist(A, \Pi) = \frac{|(a+1)\cos\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = |(a+1)\cos\theta|.$$

(g) Déterminer la distance de B à la droite Δ.
Le cours donne

$$\begin{aligned} dist(B, \Delta) &= \frac{\|AB \wedge v\|}{\|v\|} \\ &= \|(a+1)i \wedge (i+k)\|\sqrt{2} \\ &= \|(a+1)(-j)\|\sqrt{2} = |a+1|/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $S(a) = \sum_{k=0}^{n} a^k$.
   (a) Calculer $S(1)$.
   $S(1) = n+1$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$,

$$S(a) = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.$$

   Pour $n = 0$, c'est équivalent à $a^0 = \frac{1-a^1}{1-a} \Leftrightarrow 1 = 1$. Si l'hypothèse est vraie pour $n \geq 0$, alors $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_0^n a^k + a^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, c'est donc

$$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+1} + (1-a)a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

   L'hérédité est donc prouvée, donc la formule est démontrée.

4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(1+n) \leq n$.
   On a $\ln(1+0) = 0 \leq 0$, donc l'hypothèse est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(1+(n+1)) = \ln(1+n) + \ln\big(1 + 1/(n+1)\big)$, qui est d'après l'hypothèse plus petit ou égal que $n + \ln\big(1+1/(n+1)\big)$. Or $\ln(1 + 1/(n+1)) \leq \ln(2) < \ln e = 1$ car $\ln$ est croissante et $n+1 \geq 1$ pour tout n, d'où $\ln(1+n+1) \leq n+1$, et le résultat en général.

5. Quel est l'ensemble $\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{N}, mn > A\}$?
   Pour $n = 0$ et $A = 1$, il n'existe aucun $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 = mn > A = 1\}$, donc $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}$, on choisit $m = [|A|]+1$. Alors $mn \geq m \geq A+1 > A$. Donc $\mathcal{M} = \mathbb{N}^*$.