Université Joseph Fourier - L3 - Math 123 2016-2017

CC 1 -CORRIGÉ

28 septembre 2016 - 2 heures

Exercice 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$. Montrer que si f est continue en α et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Indiquer sa limite et donner un exemple qui montre que l'hypothèse de continuité de f est nécessaire.

Réponse. Soit $\epsilon > 0$. On sait que

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], |x-\alpha| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \epsilon.$$

Puisque $u_n \to \alpha$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \alpha| \leq \delta$, ce qui implique $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \epsilon$. On a prouvé que $f(u_n) \to f(\alpha)$. Soit $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. f n'est pas continue en 0 et si $u_n = 1/n$, on a $u_n \to 0$ mais $f(u_n) = 0 \not\to f(0) = 1$.

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exactement l'intervalle

$$\left[\liminf_{n\to\infty} x_n, \limsup_{n\to\infty} x_n\right] = [a,b]$$

Réponse. Si $a = b$, x_n converge et les valeurs d'adhérences valent toutes a. Sinon, soit $x \in]a,b[$, $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \min(|x-a|, |x-b|)$, et $N \in \mathbb{N}$. Soit $N' \in \mathbb{N}$, tel que $N' > N$ et $\forall n \geq N$, $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$. Soit aussi $p > N'$ tel que $u_p \in [a, x-\epsilon]$. p existe car a est valeur d'adhérence. Soit alors

$$A = \{n \geq p | \forall j \in \mathbb{N}, p \leq j \leq n, u_j \leq x - \epsilon\}.$$

A est non vide puisque $p \in A$, et est borné. En effet, b est valeur d'adhérence si bien que $\exists r > p, u_r \in [x+\epsilon, b]$, donc $A \subset [p, r[$. Maintenant, on sait que $u_{\max A+1} > x - \epsilon$ et $|u_{\max A+1} - u_{\max A}| \leq \epsilon$, donc $u_{\max A+1} \leq (x-\epsilon) + \epsilon \leq x$. Au total, $u_{\max A+1} \in [x-\epsilon, x+\epsilon]$ et donc x est valeur d'adhérence.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. On pose $\alpha = \sqrt{a}$. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $c > 0$ tel que

$$|q\alpha - p| > \frac{c}{q} \tag{$\clubsuit$}$$

pour tous les nombres entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 0$.

Réponse. On a $(q\alpha - p)(q\alpha + p) = q^2\alpha^2 - p^2 \in \mathbb{Z}$. C'est nul ssi $\alpha^2 = a = p^2/q^2$ ce qui est impossible car $a \notin \mathbb{Q}$. Donc $|(q\alpha - p)(q\alpha + p)| \geq 1$ et

$$|q\alpha - p| \geq 1/|q\alpha + p| \geq 1/(q\alpha + |p|).$$

Si $|p| \leq 2q\alpha$, alors $1/(q\alpha + |p|) \geq 1/(3q\alpha)$. Si $|p| > 2q\alpha$, $|q\alpha - p| \geq |p| - q\alpha > q\alpha \geq \alpha/q$ car $q \geq 1$. On a donc le résultat en prenant $c = \min(\alpha, 1/(3\alpha))$.

Exercice 4. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est finalement arithmétique s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Q}$ tels que $a_{n+1} - a_n = q$ pour tout $n \geq n_0$. Démontrer que l'ensemble

$$\left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ est finalement arithmétique } \right\}$$

est dénombrable.

Réponse. Pour tout $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$A(q,p) = \{(a_n)_n \text{ fin. arith.}, \forall n \geq p,\ a_{n+1} - a_n = q\}.$$

Soit $\phi : \mathbb{Q}^{p+1} \to A(q,p)$, où $\phi(x_0, \cdots, x_p)$ est la suite fin. arith. a telle que $a_i = x_i$ pour tout $0 \leq i \leq p$ et a_n définie pour $n \geq p$ par récurrence : $a_{n+1} = a_n + q$. ϕ est clairement bijective, donc $A(q,p)$ est dénombrable car en bijection avec un produit fini d'ensembles dénombrables. Puisque

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}} A(p,q),$$

A est une réunion dénombrable d'ensemble dénombrables, donc est dénombrable.

Exercice 5. Soit $(a_n)_{\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ une suite possédant une valeur d'adhérence $c > 0$. Démontrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que la suite $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $b_n = a_{\sigma(n)}^{1/n}$ soit convergente.

Réponse. Soit $d > 1$ tel que $c \in]d^{-1}, d[$. L'ensemble

$$A_1 = \left\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \in]d^{-1}, d[\right\}$$

est non vide puisque c est une valeur d'adhérence de la suite et $c \in]d^{-1}, d[$. On pose $\sigma(1) = \min A_1$. On suppose qu'on a définit $B_m = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\} \subseteq \mathbb{N}^*$ un ensemble de cardinalité $m \in \mathbb{N}^*$, et on considère

$$A_{m+1} = \left\{n \in \mathbb{N}^* :\ n \notin B_m \text{ et } a_n \in]d^{-\sqrt{m+1}}, d^{\sqrt{m+1}}[\ \right\}.$$

Comme $c \in]d^{-\sqrt{m+1}}, d^{\sqrt{m+1}}[$, l'ensemble B'_{m+1} d'indices n tels que $a_n \in]d^{-\sqrt{m+1}}, d^{\sqrt{m+1}}[$ est infini, et donc $A_{m+1} = B'_{m+1} \setminus B_m$ n'est pas vide. On definit $\sigma(m+1) = \min A_{m+1}$. On voit bien que l'ensemble $B_{m+1} = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m+1)\} \subseteq \mathbb{N}^*$ a cardinalité $m+1$.

Par construction l'application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est injective. On affirme qu'elle est aussi surjective. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ un élément qui n'est pas dans l'image de σ. Comme on a les limites des suite monotones $d^{\sqrt{m}} \to +\infty$ et $d^{-\sqrt{m}} \to 0$ quand m tend vers l'infini, il existe m_0 tel que $a_{n_0} \in]d^{-\sqrt{m}}, d^{\sqrt{m}}[$ pour tout $m \geq m_0$. Comme n_0 n'est pas dans l'image de σ (et d'après la définition de σ), on conclut qu'il existe $k = \sigma(m_0) < n_0$ tel que $a_k \in]d^{-\sqrt{m_0}}, d^{\sqrt{m_0}}[$. De plus, pour tout $m \geq m_0$ l'élément $\sigma(m)$ doit satisfaire que $\sigma(m) < n_0$ et $a_{\sigma(m)} \in]d^{-\sqrt{m}}, d^{\sqrt{m}}[$. L'application σ étant injective, cela dit qu'il existe une infinité de nombres entiers positifs inférieures à n_0, ce qui est absurde. Cela implique que σ est surjective, et donc bijective.

Il reste à démontrer que la suite $b_n = a_{\sigma(n)}^{1/n}$ est convergente. Comme $a_{\sigma(n)} \in]d^{-\sqrt{n}}, d^{\sqrt{n}}[$ par définition, $d^{-1/\sqrt{n}} \leq a_{\sigma(n)}^{1/n} \leq d^{1/\sqrt{n}}$, et donc, par le théorème d'encadrement, $a_{\sigma(n)}^{1/n}$ converge vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $b_n = a_{n-1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente avec limite ℓ, alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente. Exprimer sa limite en fonction de ℓ.

Réponse. Si a_n converge vers l', alors $l = l' + 2l'$ soit $l' = l/3$. Soit k tel que si $n \geq k$ alors $|b_n - \ell| < \epsilon$. On a

$$\epsilon > |b_n - \ell| = |a_{n-1} + 2a_n - 3\ell'| \geq 2|a_n - \ell'| - |a_{n-1} - \ell'|$$

pour tout $n \geq k$. On utilise cette ingalit alors pour produire (pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$)

$$|a_{n+p} - \ell'| < (\epsilon/2)(\sum_{i=0}^{p} 1/2^i) + (1/2^{p+1})|a_{n-1} - \ell'| \leq \epsilon + \epsilon$$

si $p >> 1$.