CC 1 -CORRIGÉ

4 octobre 2017 - 2 heures

Exercice 1 Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy et $\varepsilon = 1$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p, q \geq N$, $|u_p - u_q| \leq 1$. En particulier, pour tout $p \geq N$, $|u_p| \leq 1 + |u_N|$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max(1 + |u_N|, \max_{i\in\{0,\cdots,N-1\}} |u_i|)$. Donc $(u_n)_n$ est bornée.

Exercice 2 (a). On a pour tout $(x, y) \in A \times B$,

$$\inf_{b\in B} f(x, b) \leq f(x, y) \leq \sup_{a\in A} f(a, y).$$

Fixons $y \in B$. Alors

$$\sup_{x\in A} \inf_{b\in B} f(x, b) \leq \sup_{a\in A} f(a, y).$$

Maintenant, on prend l'inf en y, ce qui donne :

$$\sup_{x\in A} \inf_{b\in B} f(x, b) \leq \inf_{y\in B} \sup_{a\in A} f(a, y)$$

ce qui est le résultat.

(b). Soit $A = B = \{0, 1\}$ et $f(0, 0) = 1 = f(1, 1)$ avec $f(0, 1) = f(1, 0) = 0$. On peut choisir $c = 0$, $d = 1$. Alors $\inf_{b\in B} f(0, b) = f(0, 1) = 0$ et $\inf_{b\in B} f(1, b) = f(1, 0) = 0$, donc le sup de cet inf est nul. Mais $\sup_{a\in A} f(a, 0) = f(1, 0) = 1$ et $\sup_{a\in A} f(a, 1) = f(0, 1) = 1$, donc l'inf est 1.

Exercice 3 (a). $(b_n)_n$ converge donc est bornée. Donc il existe $C > 1 > 0$, pour tout n, $1 < a_n + 1/a_n \leq C$. Donc $0 < a_n \leq C$, donc $(a_n)_n$ est bornée. Par le cours, une suite bornée possède une limite inf et sup finies.

(b). Puisque $\forall n, a_n \in]1, C]$, alors par comparaison des bornes, $\ell, L \geq 1$ d'une part, et puisque $\forall n$, $b_n > a_n > 1$, $b = \limsup(b_n)_n \geq 1$.

(c). Puisque les lim inf et sup sont des valeurs d'adhérence de $(a_n)_n$, soit $(a_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite convergeant vers ℓ (resp. L). Alors puisque $\ell, L \geq 1 > 0$, on peut passer à la limite : $b = \ell + 1/\ell$ (resp. $b = L + 1/L$), donc $\ell + 1/\ell = L + 1/L$, soit $L - \ell = (L - \ell)/(\ell L)$. Si $L \neq \ell$, on peut diviser par $L - \ell$, ce qui donne $1 = 1/(\ell L)$. Mais $\ell \geq 1$, et $L > \ell$ (car $L \geq \ell$) implique $L\ell > 1$ ce qui est une contradiction. Donc $L = \ell$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_n$ définie par : si n est pair, $u_n = 1+1/n$. Si n est impair, $u_n = 0$. Cette suite est minorée par 0 et majorée par 2, donc bornée. 0 et 1 sont deux valeurs d'adhérences, car $u_{2n} \to_n 1$ et $u_{2n+1} \to_n 0$. De plus, soit $L \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence et $u_{\varphi(n)}$ une sous-suite convergeant vers L. Il existe une nombre infini de n tels que $\varphi(n)$ est pair, ou il existe une nombre infini de n tels que $\varphi(n)$ est impair. Dans le premier cas, on considère la sous-suite des $\varphi(n)$ pairs. Elle converge vers 1, donc $L = 1$. Dans le second cas, elle converge vers 0, donc $L = 0$. Par ailleurs, la suite u_{2p} est strictement décroissante, donc l'applicatin $p \in \mathbb{N}^* \mapsto u_{2p}$ est injective, donc $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \supset \{u_{2p}, p \in \mathbb{N}\}$ est infini.

Exercice 5 Par définition de la borne sup, il existe une suite $(x_n)_n$ dans l'ensemble $\{\sum_{i\in J} a_i, J \text{ fini}\}$ telle que $x_n \to_n M$, donc une suite $(J_n)_n$ de sous-ensembles finis non vides tels que

$$\sum_{j\in J_n} a_j \to_{n\to\infty} M.$$

Posons $J = \cup_{n\in\mathbb{N}} J_n \subset I$ et $x \in I \setminus J$, si $I \neq J$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\sum_{j\in J_N} a_j \geq M - a_x/2.$$

Soit $\tilde{J} := J_N \cup \{x\}$. On a d'une part que $\tilde{J}$ est un sous-ensemble fini de I, et d'autre part $x \notin J_N$ car $x \notin J$. Ceci implique que

$$\sum_{j\in\tilde{J}} a_j \geq (M - a_x/2) + a_x \geq M + a_x/2 > M$$

car les a_j sont > 0. Ceci contredit le caractère majorant de M, donc $J = I$, et I est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.