CC1 - Topologie A (04/10/2017)

Premier Semestre 2017-2018

Justifier toutes les réponses

Exercice 1. **(Autour du cours)** Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.

Exercice 2. Soient A et B deux ensembles non vides et $f : A \times B \to [c, d]$ une application, où $c < d$ sont deux nombres réels.

(a) Montrer que

$$\sup_{a \in A} \Big(\inf_{b \in B} f(a, b) \Big) \leq \inf_{b \in B} \Big(\sup_{a \in A} f(a, b) \Big). \tag{$\spadesuit$}$$

(b) Donner un exemple explicite d'ensembles A et B, et d'application f pour lesquels l'inégalité (♠) est stricte.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $a_n > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite

$$b_n = a_n + \frac{1}{a_n} \tag{$\clubsuit$}$$

est convergente avec limite $b \in \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que les limites inférieure et supérieure de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existent (*i.e.* elles sont des nombres réels). On les appellera ℓ et L, respectivement.

(b) Montrer que $\ell, L \geq 1$ et $b \geq 1$.

(c) Démontrer que $\ell = L$, *i.e.* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 4. Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède exactement deux valeurs d'adhérences et

(iii) l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est infini ?

Exercice 5. Soit I un ensemble quelconque et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels strictement positifs. On suppose que

$$M := \sup\left\{ \sum_{j\in J} a_j \mid J \text{ est une partie finie et non vide de } I \right\}$$

est fini. Démontrer que l'ensemble I est dénombrable. Pour cela, on pourra d'abord construire une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de I, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} a_j = M.$$